

# Tükrözéscsoportok

Elek Balázs  
University of Toronto

2019. január 10.

## 1. Motiváció: Szabályos politópok

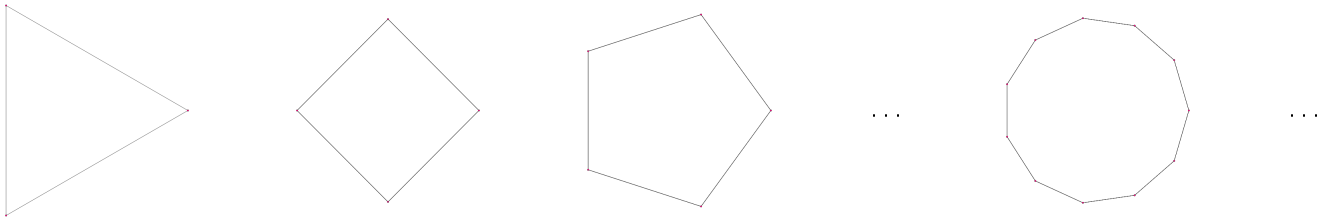
**1.1. Definíció.** Vegyünk egy véges  $S$  ponthalmazt az  $\mathbb{R}^n$   $n$ -dimenziós térben, a ponthalmaz **konvex burka**  $\text{Kb}(S)$  a az  $S$ -t tartalmazó összes konvex halmaz metszete.

**1.2. Definíció.** Egy **politóp** olyan  $P$  részhalmaza  $\mathbb{R}^n$ -nek amire igaz hogy  $P = \text{Kb}(S)$ .

**1.3. Definíció.** A  $P$  politóp **dimenziója** az a legkisebb  $m$ -dimenziós altér  $V \subset \mathbb{R}^n$  amire igaz hogy  $P \subseteq V$ .

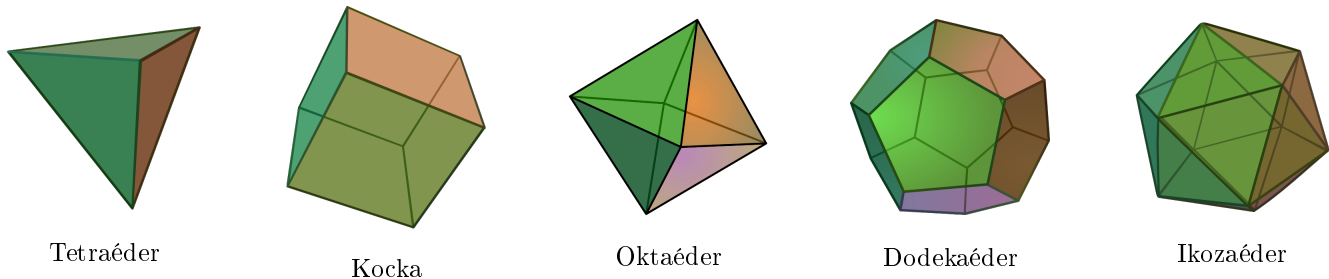
**1.4. Példa.** Egy 2-dimenziós politóp egy sokszög.

Minden  $n \geq 3$  pozitív egészre létezik egy szabályos sokszög



1. ábra. Szabályos sokszögek

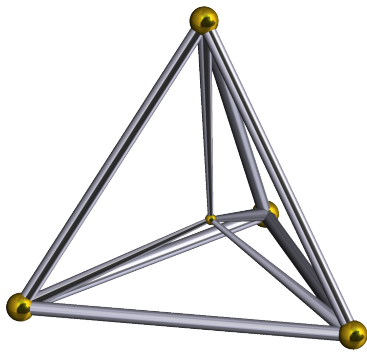
A szabályos sokszög megfelelője a 3-politópok között a szabályos poliéder. Szabályos poliéderekből már csak öt darab van.



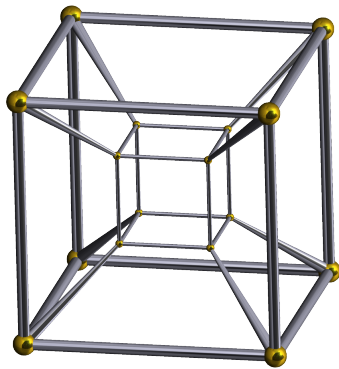
2. ábra. Szabályos poliéderek

Szabályos 4-politópból hat,

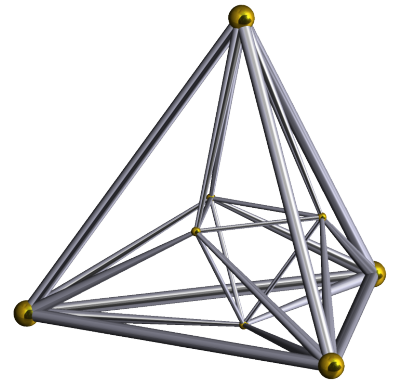
Bármilyen  $n \geq 5$  pozitív egészre pedig három szabályos  $n$ -politóp létezik. Ezt a tételt (is) beláthatjuk a véges tükrözéscsoportok klasszifikációjából.



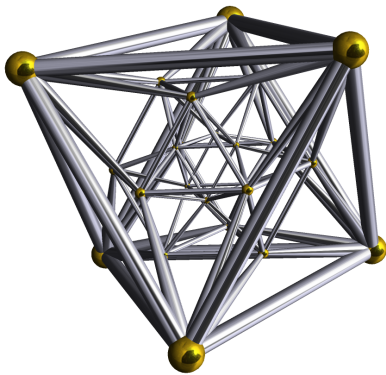
5-cell



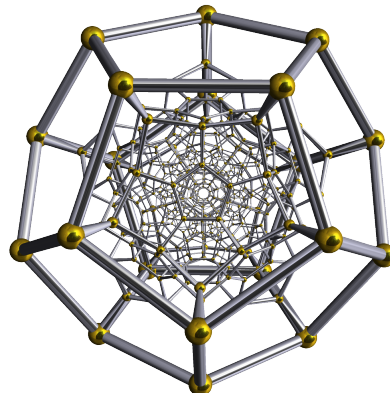
8-cell



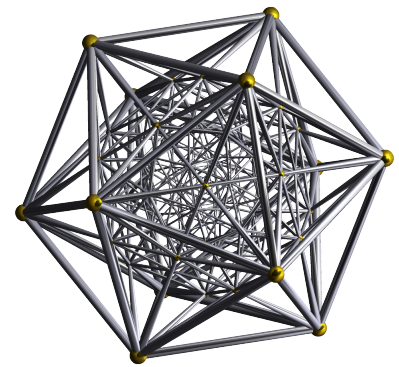
16-cell



24-cell



120-cell

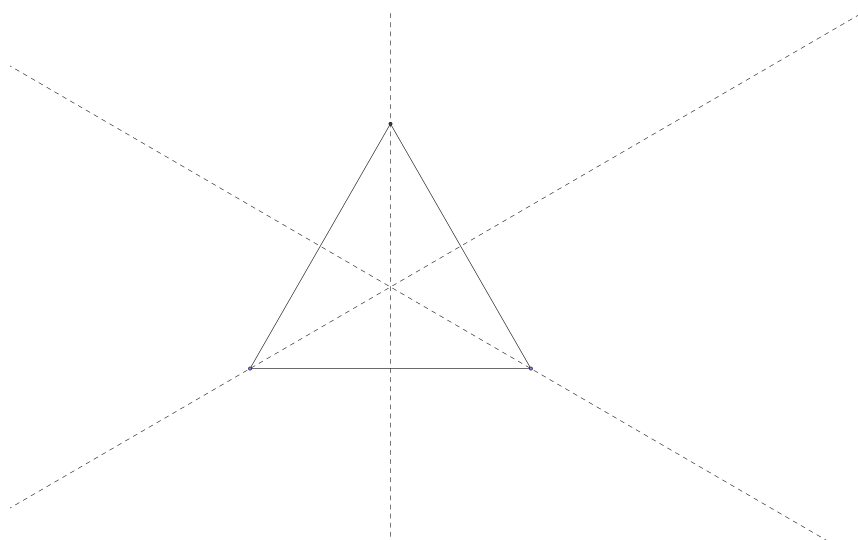


600-cell

3. ábra. Szabályos 4-politópok

## 2. Szabályos politópok szimmetriái

Vizsgáljuk meg egy szabályos  $n$ -szög szimmetriáit.



Az  $n$  szimmetriatengely mindegyikén át való tükrözéssel kapunk  $n$  tükrözést, valamint létezik még  $n$  forgatásos

szimmetria.

**2.1. Tétel.** *Egy szabályos  $n$ -szög összesen  $2n$  szimmetriával rendelkezik. Továbbá az összes szimmetria kifejezéséhez elegendő 2 szomszédos szimmetriatengelyen át való tükrözés.*

**Bizonyítás** Egy sokszög legfeljebb  $2n$  szimmetriával rendelkezhet, mivel ha tudjuk hogy egy szimmetria hová küld egy csúcsot és egy vele szomszédos élt, akkor a szimmetria determinált. Mivel a  $2n$  előzőleg talált szimmetria mind különböző, az első állítást már beláttuk.

A második állításhoz jelöljük a két szomszédos szimmetriatengelyen át tükrözést  $s_\alpha$ -val és  $s_\beta$ -val. Vegyük észre hogy  $r = s_\alpha s_\beta$  egy  $2\pi/n$  szöggel való forgatás, így megkaphatjuk az  $n$  különböző forgatást  $r$  hatványaiként. Az  $n$  különböző tükrözést pedig megaphatjuk  $r^k s_\alpha r^{-k}$  formában.

A bizonyítás részleteihez vegyük észre hogy

**2.2. Feladat.** *Ha az  $\alpha$  egy, a szimmetriasíkra merőleges vektor, és  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , akkor*

$$s_\alpha(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{2(\vec{x} \cdot \alpha)}{(\alpha \cdot \alpha)} \alpha,$$

ahol  $\cdot$  a skaláris szorzat.

valamint

**2.3. Feladat.** *Legyen  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ , lássuk be a 2.2 használatával hogy  $s_\beta s_\alpha$  egy (a két egyenes által bezárt szög kétszeresével való) forgatás. Tipp: A képlet egyszerűbb ha (az általánosság elvesztése nélkül) feltesszük hogy  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*

*és azt hogy  $\beta = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$ .*

A fenti eredményeket a következőképp összegezhethetjük:

1. Minden szabályos sokszög szimmetriacsoportja két tükrözés által generált.
2. A szimmetriacsoport determinált ha tudjuk a két tükrözés közötti szöget.
3. Egy szimmetriacsoporthoz csak egy szabályos sokszög tartozik.

A fentebbi észrevételek természetes általánosítása pedig az alábbi formában igaz:

1. Minden szabályos  $n$ -politóp szimmetriacsoportja  $n$  tükrözés által generált.
2. A szimmetriacsoport determinált ha tudjuk a bármely két tükrözés közötti szöget.
3. Egy szimmetriacsoporthoz legfeljebb két szabályos  $n$ -politóp tartozik (a duális politópok szimmetriacsoportja megegyezik).

Ez alapján ha sikerül klasszifikálnunk a véges tükrözéscsoportokat, ezt felhasználhatjuk a szabályos politópok klasszifikációjához.

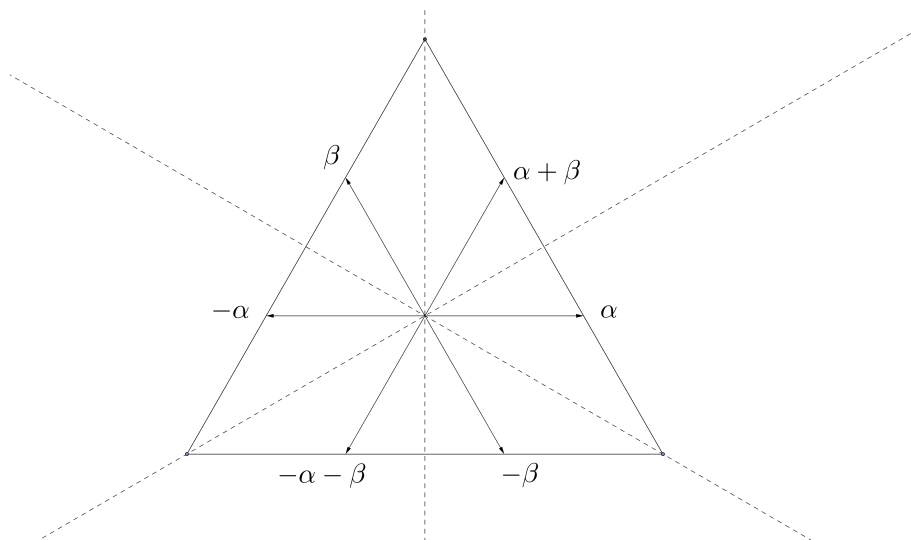
### 3. Gyökrendszerek

#### 3.1. $A_2$

Térjünk vissza a szabályos háromszög szimmetriáihoz (4. ábra): Fejezzük ki az összes szimmetriát  $s_\alpha$  és  $s_\beta$  szorzataként:

	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$-\alpha$	$-\beta$	$-\alpha - \beta$
$e$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$-\alpha$	$-\beta$	$-\alpha - \beta$
$s_\alpha$	$-\alpha$	$\alpha + \beta$	$\beta$	$\alpha$	$-\beta - \alpha$	$-\beta$
$s_\beta$	$\alpha + \beta$	$-\beta$	$\alpha$	$-\alpha - \beta$	$\beta$	$-\alpha$
$s_\alpha s_\beta$	$\beta$	$-\alpha - \beta$	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha + \beta$	$\alpha$
$s_\beta s_\alpha$	$-\alpha - \beta$	$\alpha$	$-\beta$	$\alpha + \beta$	$-\alpha$	$\beta$
$s_\alpha s_\beta s_\alpha$	$-\beta$	$-\alpha$	$-\alpha - \beta$	$\beta$	$\alpha$	$\alpha + \beta$

1. táblázat. A szimmetriacsoport reprezentációja az  $A_2$  gyökrendszeren

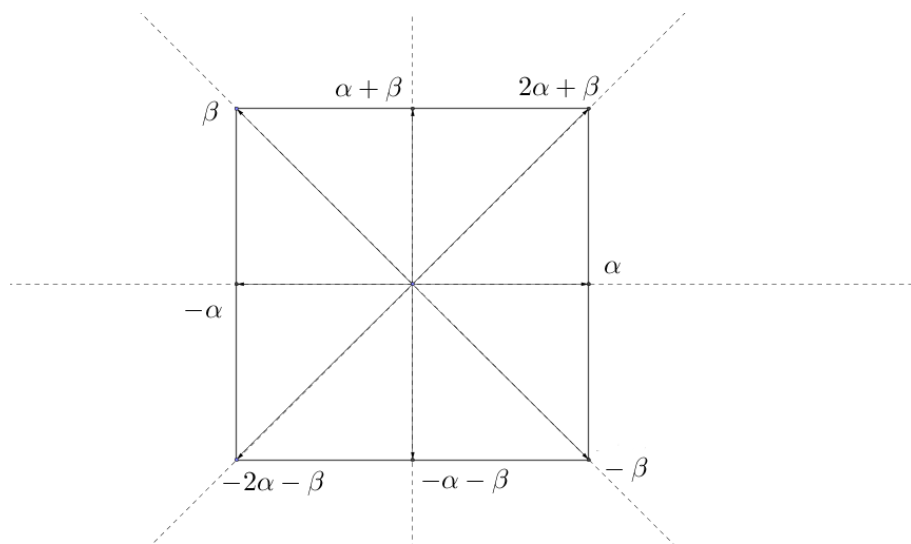


4. ábra. Az  $A_2$  gyökrendszer

Vegyük észre hogy minden szimmetria permutálja a  $\Phi_{A_2} = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, -\alpha, -\beta, -\alpha - \beta\}$  halmazt valamint azt hogy a  $\Phi_{A_2}$ -n való reprezentáció elegendő a szimmetria leírásához. Ez egy fontos eredmény, mivel így az eredetileg bonyolult geometriai reprezentációt sikerült lecserélnünk egy véges (kombinatorikai) problémára.

### 3.2. $B_2$

Próbáljuk ezt megismételni a négyzet esetében (5. ábra): A releváns halmaz ez esetben  $\Phi_{B_2} = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \beta - \alpha, -\beta, -\alpha - \beta, -2\alpha - \beta\}$ .



5. ábra. A  $B_2$  gyökrendszer

$\beta - \alpha, -\beta, -\alpha - \beta, -2\alpha - \beta\}$ .

**3.1. Feladat.** Írjunk fel egy, a 1-höz hasonló táblázatot a  $\Delta_{B_2}$  gyökrendszerre.

### 3.3. Általános gyökrendszerek

**3.2. Definíció.** Egy véges  $\Phi \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})$  halmazt akkor nevezünk **gyökrendszernek** ha

- $\Phi \cap L_\alpha = \{\alpha, -\alpha\} \quad \forall \alpha \in \Phi,$

- $s_\alpha \Phi = \Phi \quad \forall \alpha \in \Phi$ .

ahol az  $L_\alpha$  az  $\alpha$  vektor által meghatározott (és  $\vec{0}$ -n áthaladó) egyenes.

**3.3. Feladat.** Győződjünk meg róla hogy az  $A_2$  és  $B_2$  gyökrendszerek megfelelnek ezeknek a feltételeknek.

Ekkor definiálhatjuk a  $W_\Phi$  tükrözéscsoportot úgy mint az összes tükrözés  $\{s_\alpha | \alpha \in \Phi\}$  által generált szimmetriacsoportot.

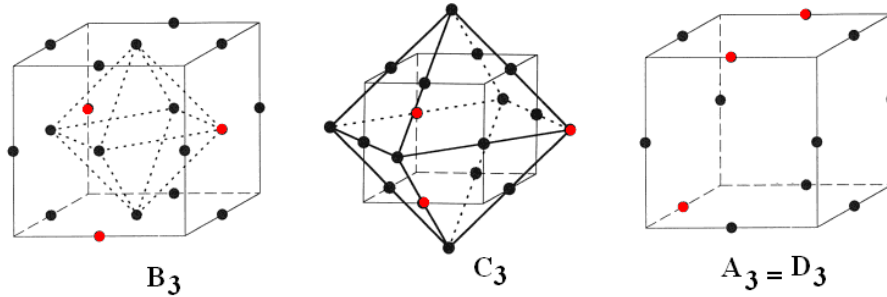
Hasonlóképp, bármilyen véges  $W$  tükrözéscsoportból kiindulva kaphatunk egy gyökrendszert ha veszünk minden szimmetriasíkhhoz egy rá merőleges két egységvektort, ekkor egy  $\Phi$  gyökrendszert kapunk amire igaz hogy  $W = W_\Phi$ . Egy tükrözéscsoporthoz több gyökrendszer is tartozhat (például  $B_2$  esetében válaszhattunk nem egységvektorokat is).

**3.4. Tétel.** 1. Bármely  $\Phi \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\})$  gyökrendszerre igaz hogy válaszhatunk  $n$  **szimpla gyökből** álló  $\Delta$  halmazt, amelyre igaz hogy az összes többi gyököt felírhatjuk a  $\Delta$ -ban lévő gyökök csak vagy pozitív vagy csak negatív együtthatós lineáris kombinációjaként.

2. Ha  $\alpha, \beta \in \Delta$  és  $\alpha \neq \pm \beta$  akkor az  $\alpha$  és  $\beta$  által bezárt szög tompaszög vagy derékszög.

3. Elegendő a szimpla gyökök közötti szögeket tudnunk hogy a teljes tükrözéscsoportot leírassuk.

**3.5. Példa.** A 6 ábrán láthatjuk a 3-dimenziós gyökrendszereket.



6. ábra. A  $B_3, C_3, A_3 = D_3$  gyökrendszerek, a szimpla gyökök a pirossal jelöltek ( $\vec{0}$  a kockák közepén van).

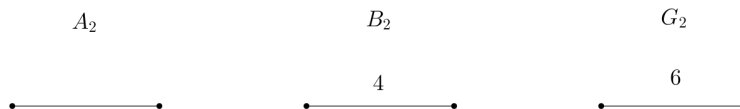
## 4. A gyökrendszerek klasszifikációja

A fenti észrevételeink alapján szeretnénk meghatározni az összes lehetséges gyökrendszert. A 3.4 tétel szerint csak a szimpla gyökök közötti páronkénti szögekre van szükség. Ha  $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta$ ,  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , és az (általuk meghatározott síkban fekvő) ezekre merőleges egyenesek által bezárt szög  $\theta$  akkor az  $s_{\alpha_i} s_{\alpha_j}$  egy forgatás  $2\theta$  szöggel, és mivel a véges tükrözéscsoportokat keressük, létezik egy legkisebb pozitív egész  $m_{i,j}$  amire igaz hogy  $(2\theta) \cdot m_{i,j} = 2\pi$ , tehát

$$(s_{\alpha_i} s_{\alpha_j})^{m_{i,j}} = e.$$

**4.1. Definíció.** Definiáljunk egy gráfot (a tükrözéscsoport **Coxeter-gráfját**) aminek rendelkezik minden szimpla gyökhöz egy csúccsal, és két csúcs között van egy él  $m_{i,j}$  címkével ha  $m_{i,j} \geq 3$  (ha  $m_{i,j} = 3$  akkor általában elhagyjuk a címkét).

Lásd a 7. ábrát.



7. ábra. A szabályos háromszög, négyszög és hatszög szimmetriacsoportjainak Coxeter-gráfjai

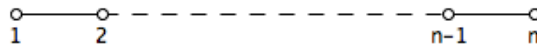
#### 4.1. Az $A_n$ gyökrendszer

**4.2. Definíció.** Legyen  $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$  egy vektor aminek  $i$ -edik koordinátája 1 a többi pedig 0. Legyen  $A_n = \{\vec{e}_i - \vec{e}_j \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$ .

**4.3. Feladat.** Lássuk be hogy  $A_n$  egy gyökrendszer.

**4.4. Feladat.** Lássuk be hogy az  $A_n$  gyökrendszer tükrözéscsoportja  $S_{n+1}$ , azaz megfelel egy  $n + 1$ -elemű halmaz permutációinak. Ezt használva lássuk be hogy ez az  $n$ -szimplex, (a háromszög és a tetraéder természetes megfelelője  $n$  dimenzióban). Tipp: Az  $n$ -szimplex természetesen megtalálható  $\mathbb{R}^{n+1}$ -ben mint a  $\vec{e}_i$  vektorok konvex burka.

**4.5. Feladat.** Lássuk be hogy az  $A_n$  Coxeter gráfja a 8 ábrán látható.



8. ábra. The Coxeter graph of  $A_n$

### 5. Coxeter-gráfok

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel hogy  $m_{i,j} = 2, 3$  bármelyik két szimpla gyökre, azaz azt, hogy bármely két szimpla gyök által bezárt szög vagy derékszög vagy  $120^\circ$ . Ekkor a szimpla gyököknek megfelelő tükrözések a következőképp hatnak a szimpla gyökökre (ha  $i \neq j$ ):

$$s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \begin{cases} \alpha_j & \text{ha } m_{i,j} = 2 \\ \alpha_j + \alpha_i & \text{ha } m_{i,j} = 3 \end{cases}$$

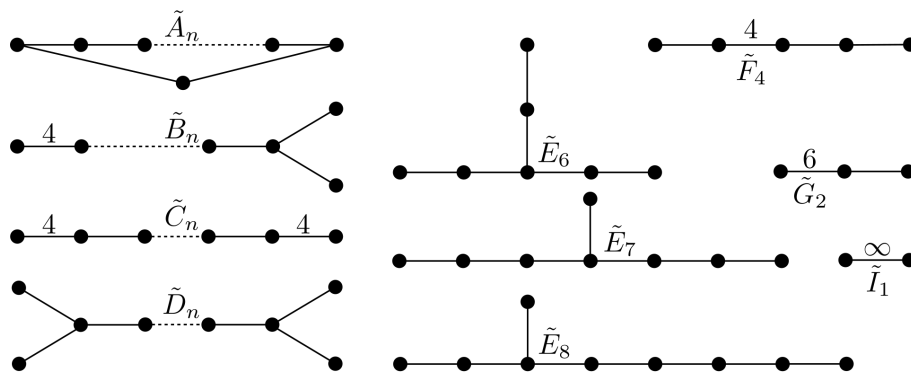
Most azokat a gráfokat keressük amik véges tükrözéscsoportokat eredményeznek. Legyen  $G$  egy gráf, a következő játékot fogjuk  $G$ -n játszani:

1. A gráf csúcsaira számokat fogunk írni, a kezdőpozíció az, hogy egy csúcson 1, a többin pedig 0 van.
2. Egy csúcs:
  - (a) **szomorú** ha a rajta található szám **kevesebb** mint a szomszédjai számai összegének a fele.
  - (b) **boldog** ha a rajta található szám **egyenlő** a szomszédjai számai összegének a felével.
  - (c) **mániás** ha a rajta található szám **több** mint a szomszédjai számai összegének a fele.
3. Keressünk egy szomorú csúcsot, és a jelenlegi száma helyére írjuk egy új számot ami egyenlő a szomszédai számainak összege – a régi számával.
4. Az előző lépést ismételjük amíg vannak szomorú csúcsok.

**5.1. Tétel.** A fenti játék akkor és csak akkor ér véget ha a  $G$  gráf egy véges tükrözéscsoport Coxeter-gráfja.

**Bizonyítás**(Nagyvonalakban) A játék azt modellezi hogy egy szimpla gyökből hány különböző gyököt találhatunk azáltal hogy a többi szimpla gyöknek megfelelő tükrözéseket végezzük el rajta. Ha ez nem egy véges mennyiség akkor végtelen mennyiségű tükrözés található a tükrözéscsoportban.

**5.2. Feladat.** Lássuk be hogy a 9 ábrán látható gráfok egyike sem vezet véges tükrözéscsoportoz (ez nehezebb mint az előző feladatok).

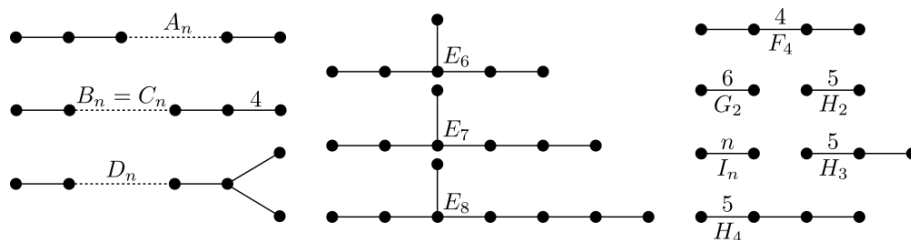


9. ábra. Affin Coxeter-gráfok

*Tipp:* Az összes eset bizonyítása hasonló. Az  $\tilde{A}_n$  esetében vegyük észre, hogy a helyzet ahol minden csúcson 1-es szám van (és mindenki boldog) sosem áll elő. Ugyanakkor ezen a konfiguráción semmilyen tükrözés nem változtat. Ezek felhasználásával lássuk be hogy tetszőlegesen nagy számokat elő tudunk állítani az  $A_n$  gráfon.

Ha egy  $G$  gráf  $H$  algráfjára igaz hogy  $H$  nem vezet véges tükrözéscsoportoz akkor  $G$  sem, tehát a fenti feladatban talált gráfok mindegyike „tiltott”.

**5.3. Feladat.** A fenti eredményt felhasználva lássuk be hogy csak a 10 ábrán látható gráfok vezetnek véges tükrözéscsoportoz (ez szintén egy nehezebb feladat).



10. ábra. Véges tükrözéscsoportok Coxeter-gráfjai

*Tipp:* Tegyük fel hogy a vizsgált gráf nem tartalmazza semmilyen az előző feladatban talált tiltott gráfok egyikét. Mivel  $G$  nem tartalmazhat kört, ezért  $G$  egy fagraf. Ha  $G$ -nek nincsenek elágazási pontjai akkor  $G$  az  $A_n$  gráf. Ez az elágazási pont legfeljebb 3 másik csúccsal lehet szomszédos, mivel  $G$  nem tartalmazhatja a  $\tilde{D}_3$  gráfot. Továbbá  $G$  nem tartalmazhat több mint egy elágazási pontot, mivel ekkor tartalmazná a  $\tilde{D}_n$  tiltott gráfot. Már csak azt kell megállapítanunk hogy az elágazási ponttól számítva a gráf ágai milyen hosszúak lehetnek. Mivel az  $\tilde{E}_6$  gráf tiltott, legalább az egyik ág legfeljebb 1 hosszúságú. Mivel  $\tilde{E}_7$  tiltott, a második legrovidebb ág legfeljebb 2 hosszúságú. Ha ennek a hossza 1 akkor a  $D_n$  esetben vagyunk, ellenkező esetben pedig a gráf  $E_6, E_7$  vagy  $E_8$ , mivel az  $\tilde{E}_8$  gráf tiltott.

Már említettük hogy az  $A_n$  tükrözéscsoport az  $n$ -szimplex szimmetriacsoportja. A  $B_n/C_n$  csoport a négyzet/kocka/oktaéder politópcsalád szimmetriacsoportja. Ezen kívül csak a  $D_n$  csoport létezik tetszőlegesen magas dimenzióban, de ehhez nem tartozik szabályos politóp (a politóp aminek a  $D_n$  természetes szimmetriacsoportja az  $n$ -kockából kapható ha a csúcsok felét elhagyjuk).

## Hivatkozások

[1] —, *Reflection groups: Notes for a short course at the Ithaca high school senior seminar* [http://www.math.toronto.edu/~balazse/reflection\\_groups\\_2016.pdf](http://www.math.toronto.edu/~balazse/reflection_groups_2016.pdf)

[2] Humphreys, James E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, GTM 9, Springer 1972.

- [3] Humphreys, James E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics 29, Cambridge University Press 1990.
- [4] Björner, Anders, Brenti, Francesco, *Combinatorics of Coxeter Groups*, GTM 231, Springer 2005