Prob. 9, 309–313, 1981. 191–196, 1979. certaines semimartingales.

AUTOUR D'UN THÉORÈME DE TSIRELSON SUR DES FILTRATIONS BROWNIENNES ET NON BROWNIENNES

par M.T. Barlow, M. Émery, F.B. Knight, S. Song et M. Yor

En 1979, l'un de nous a posé dans [23] le problème suivant : Si un mouvement brownien linéaire a la propriété de représentation prévisible dans une certaine filtration (qui peut être plus grosse que sa filtration naturelle mais pour laquelle ce mouvement brownien est une martingale), cette filtration est-elle nécessairement engendrée par un (autre) mouvement brownien ? Dix ans plus tard, ce problème a été l'une des motivations de l'étude [4] sur les « mouvements browniens de Walsh »; si, comme on peut s'y attendre, la filtration naturelle de ces processus n'est pas brownienne, elle fournit un contre-exemple au problème initial. Mais le problème général est resté ouvert jusqu'en 1994, quand L. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinsky et B. Tsirelson y ont apporté dans [8] une réponse négative au moyen d'un contre-exemple effroyablement compliqué (récemment simplifié par W. Schachermayer [19]). La question plus particulière de savoir si les mouvements browniens de Walsh, pourtant bien plus simples, ont aussi une filtration non-brownienne, restait pendante. Elle a été résolue en 1996 par B. Tsirelson, qui a donné une magnifique démonstration du caractère non brownien des filtrations walshiennes. Plus précisément, il montre qu'il n'existe aucun processus de Walsh dans la filtration naturelle d'un mouvement brownien, même si ce mouvement brownien est de dimension plus grande que 1, voire infinie !

L'outil fondamental introduit par Tsirelson est une propriété de rigidité des mouvements browniens : Si B et B' sont deux mouvements browniens tels que $\langle B,B'\rangle_t = (1-\varepsilon)\,t$, où ε est petit, leurs filtrations naturelles sont à la fois proches (au sens où tout objet dans l'une est approché par un objet analogue dans l'autre) et néanmoins bien distinctes (deux mouvements browniens de la forme $\int H\,dB$ et $\int H'\,dB'$ ont très peu de zéros communs; deux v. a. $U=f(B)$ et $U'=g(B')$ de lois diffuses vérifient nécessairement $\mathbb{P}[U=U']=0$). Tsirelson montre que les filtrations des processus de Walsh ne peuvent pas satisfaire simultanément ces deux contraintes, et en déduit qu'une filtration brownienne ne peut pas contenir de processus de Walsh.

Notre but initial était de traduire, pour les lecteurs du Séminaire, le travail de Tsirelson dans le langage de la théorie générale des processus. Cette traduction s'est peu à peu enrichie de remarques sur les idées de Tsirelson et de corollaires de sa méthode; elle est devenue un article autonome. De son côté, Tsirelson a continué à approfondir ces questions, et en comparant nos manuscrits en juin 1997, nous les avons trouvés très semblables sur le fond, bien que de style et de vocabulaire assez différents.

Cette similitude n'est pas étonnante, les idées maîtresses, qui charpentent tout l'édifice, étant celles de Tsirelson. L'article [20] de Tsirelson paraîtra dans *Geometric and Functional Analysis.*

Notre première partie, assez fastidieuse, est consacrée à des généralités et à du vocabulaire. Elle est là surtout par souci de complétude et peut être omise sans inconvénient, à l'exception du joli théorème 1, puissant, simple et important pour la suite.

La seconde partie introduit une classe de processus, les martingales-araignées, qui nous paraissent être au cœur de la question (ce sont les martingales continues à $n-1$ dimensions qui prennent leurs valeurs dans n demi-droites issues de l'origine et non contenues dans un hyperplan, par exemple les martingales complexes Y telles que $\arg Y = 0 \mod 2\pi/3$). Le résultat fondamental est le théorème 2 : les filtrations browniennes ne contiennent pas de martingales-araignées non triviales. C'est certainement le résultat le plus important de cette étude; la méthode est celle inventée par Tsirelson pour montrer que les filtrations browniennes ne contiennent pas de processus de Walsh non triviaux.

La troisième partie rappelle la définition des temps honnêtes (les instants de début des excursions d'une martingale-araignée sont des exemples de temps honnêtes) et déduit du théorème 2 la réponse (positive) à une question posée dans [4] : Si L est un temps honnête dans la filtration naturelle $\mathcal{F}$ d'un mouvement brownien, on a $\mathcal{F}_{L+} = \mathcal{F}_L \vee \sigma(A)$, où A est un événement; le supplément d'information qui apparaît à l'instant $L+$ est donc au maximum de un bit. Cette propriété est préservée par les changements (raisonnables!) de temps ou de probabilité.

La dernière partie s'intéresse aux processus de Walsh. En traduisant pour ces processus les résultats précédents, on voit que ces processus ne peuvent vivre dans une filtration brownienne; et en localisant la méthode de Tsirelson à des intervalles prévisibles, on obtient la diversité des filtrations walshiennes : deux processus de Walsh qui engendrent la même filtration, ou des filtrations isomorphes, ont la même loi.

Notre exposé ne prétend bien sûr pas se substituer à la lecture du travail original [20] de Tsirelson, dans lequel se trouvent entre autres les deux beaux théorèmes que voici et dont nous ne traitons pas :

a) *Si, dans une filtration brownienne, Y est une semimartingale continue à valeurs complexes telle que* $\arg Y = 0 \mod 2\pi/3$, *et si la partie à variation finie de Y est portée par le fermé $\{Y = 0\}$, alors les parties à variation finie $dA^{(j)}$ des trois « composantes » $Y^{(j)} = |Y|\,\mathbb{1}_{\{\arg Y = 2j\pi/3\}}$ vérifient*

$$dA^{(1)} \wedge dA^{(2)} \wedge dA^{(3)} = 0 .$$

b) *Soient $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ trois ouverts connexes de $\mathbb{R}^d$, bornés et tels que $U^{(j)} \cap U^{(k)} = \varnothing$ pour $j \neq k$; soient $x_j \in U^{(j)}$ et $\mu^{(j)}$ la mesure harmonique pour le couple $(x_j, U^{(j)})$* (c'est-à-dire la loi du point d'atteinte de $\partial U^{(j)}$ par le brownien issu de x_j ; la classe d'équivalence de $\mu^{(j)}$ ne dépend pas du choix de x_j dans $U^{(j)}$). *Tsirelson démontre que*

$$\mu^{(1)} \wedge \mu^{(2)} \wedge \mu^{(3)} = 0 .$$

Notre principale source d'inspiration a été le travail de Tsirelson, que nous remercions pour nous avoir communiqué dès l'été 1996 une version préliminaire de [20], et

pour sa sympathique correspondance. Merci aussi à Jacques Azéma pour ses remarques.

Les passages en petits caractères sont des digressions qui peuvent être omises sans nuire à la compréhension des résultats principaux (théorèmes 1 à 4).

1. Notations et préliminaires

Nous suivrons les conventions habituelles : les espaces probabilisés seront toujours complets, les sous-tribus considérées contiendront tous les négligeables et les filtrations seront continues à droite. Par exemple, la tribu dont est muni un produit $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}) \times (\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ n'est pas la tribu produit, mais sa complétée pour la loi produit. Si $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ désignera l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de variables aléatoires presque sûrement finies, et sera muni de la topologie de la convergence en probabilité. Rappelons que $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ est dit *essentiellement séparable* si l'espace vectoriel topologique $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ est séparable; il existe alors dans $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ une algèbre de Boole $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ dénombrable et dense pour la distance non séparante $\mathbb{P}[A \triangle B]$; $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est engendrée par $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et par les événements négligeables. (Nous aurons besoin de cette hypothèse de séparabilité essentielle pour certains des espaces d'états dans lesquels vivront les processus, mais nous ne la ferons jamais pour les espaces d'épreuves Ω.)

Toutes les intégrales stochastiques et tous les crochets de semimartingales seront, par convention, nuls à l'origine. Le processus intégrale stochastique de X par rapport à Y, qui vaut $\int_0^t X_s\,dY_s$ à l'instant t, sera noté $\int X\,dY$; si Y est le processus croissant identité ($Y_t = t$ pour tout t), nous écrirons par abus de notation $\int X\,dt$.

La filtration naturelle (implicitement complétée et continue à droite) d'un processus X sera notée $\mathrm{Nat}\,X$.

Nous utiliserons la théorie des temps locaux des semimartingales continues, telle qu'elle est exposée, par exemple, dans le chapitre VI de [18]. Nous adopterons en particulier les conventions familières aux habitués du Séminaire : les temps locaux $(L_t^a)_{a\in\mathbb{R},t\geqslant 0}$ sont continus à droite en la variable d'espace a; du coup, dans la formule du changement de variable pour les fonctions convexes, c'est une dérivée à gauche qui intervient, et $\mathrm{sgn}\,0 = -1$.

Nous commençons par quelques définitions qui précisent la notion d'isomorphisme de filtrations. Il s'agit de choses que les probabilistes connaissent depuis fort longtemps et utilisent depuis bien plus longtemps encore; le lecteur est invité à les sauter pour passer directement au théorème 1, et à n'y revenir ensuite qu'en cas de nécessité, s'il a un doute sur la rigueur des opérations que nous ferons subir aux espaces probabilisés.

Définition. — *Si* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *et* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *sont deux espaces probabilisés, on appellera* morphisme presque sûr de $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ vers $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *toute application* Ψ *de* $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $\mathrm{L}^0(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *telle que, pour tout* n*, toute fonction* f *borélienne sur* $\mathbb{R}^n$*, et tous* $U_1, ..., U_n$ *dans* $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$*, on ait*

$$\Psi\big(f\circ(U_1, ..., U_n)\big) = f\circ\big(\Psi(U_1),\ \dots,\ \Psi(U_n)\big)\ .$$

Parmi les exemples triviaux mais fort importants de morphismes presque sûrs figurent les changements absolument continus de probabilité (l'application « identique » de $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ dans $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})$, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$) et les grossissements de tribus (l'injection canonique de $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ dans $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P})$, où $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est une sous-tribu de $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$).

Un autre exemple intéressant est obtenu quand $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est engendrée par une variable aléatoire X sur Ω et que l'on a sur Ω' une variable aléatoire X' de loi absolument continue par rapport à celle de X ; on peut alors définir Ψ par $\Psi(g \circ X) = g \circ X'$ pour toute g borélienne. En effet, Ψ est bien défini car si $g \circ X = h \circ X$ p. s., le borélien $\{g \neq h\}$ est négligeable pour la loi de X, donc pour celle de X', d'où $g \circ X' = h \circ X'$ p. s. ; et la propriété de morphisme presque sûr est vérifiée identiquement. (Les variables X et X' ne sont pas nécessairement réelles ; nous aurons besoin du cas où elles sont à valeurs dans un espace métrique séparable.)

Comme leur nom l'indique, les morphismes presque sûrs ne correspondent pas nécessairement à une opération sur les espaces Ω et Ω', et ne peuvent en général pas être définis ω par ω. (Penser au cas où les deux tribus $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ sont dégénérées.)

Proposition 1. — *Les morphismes presque sûrs sont linéaires, préservent les constantes, sont croissants, et continus pour la convergence en probabilité.*

Si X est une variable aléatoire (ou un vecteur aléatoire) et Ψ un morphisme presque sûr, la loi de $\Psi(X)$ est absolument continue par rapport à celle de X ; en particulier, si X est l'indicatrice d'un événement, $\Psi(X)$ aussi.

Le composé de deux morphismes presque sûrs en est aussi un.

Démonstration. — La linéarité et la préservation des constantes s'obtiennent en prenant f affine dans la définition. Si R est une relation binaire borélienne sur $\mathbb{R}$, $R(X,Y) \Rightarrow \mathbb{1}_R(X,Y) = 1 \Rightarrow \mathbb{1}_R\big(\Psi(X), \Psi(Y)\big) = 1 \Rightarrow R\big(\Psi(X), \Psi(Y)\big)$ pour tout morphisme presque sûr Ψ ; en particulier, Ψ est croissant.

Pour établir la continuité, il suffit de montrer que si une suite X_n tend vers 0 en probabilité, $\Psi(X_n)$ aussi. Pour le prouver, nous avons le droit de ne le vérifier que pour une sous-suite. Nous savons que $\mathbb{E}\big[|X_n| \wedge 1\big] \to 0$; en extrayant une sous-suite, on se ramène au cas où $\sum_n \mathbb{E}\big[|X_n| \wedge 1\big] < \infty$. On a alors $\sum_n \big(|X_n| \wedge 1\big) < \infty$ p. s., d'où $S = \sum_n |X_n| < \infty$ p. s. et, pour tout k, $\sum_{n \leqslant k} |X_n| \leqslant S$. La propriété de morphisme donne $\sum_{n \leqslant k} \big|\Psi(X_n)\big| \leqslant \Psi(S)$; il en résulte que $\sum_n \big|\Psi(X_n)\big| < \infty$ p. s. et $\Psi(X_n) \to 0$ p. s., donc en probabilité.

Enfin, si B est un borélien tel que $\mathbb{P}[X \in B] = 0$, on a $\mathbb{1}_B(X) = 0$ p. s., d'où $\mathbb{1}_B\big(\Psi(X)\big) = 0$, et $\mathbb{P}[\Psi(X) \in B] = 0$; la loi de $\Psi(X)$ est donc absolument continue par rapport à celle de X. ∎

Définition. — *On appellera* plongement de $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *tout morphisme presque sûr Ψ tel que, pour tout $X \in \mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$, les variables aléatoires X et $\Psi(X)$ aient même loi.*

Les plongements transportent toute la structure probabiliste, sauf peut-être les épreuves ω. Il s'agit donc d'une notion pré-kolmogorovienne ! Leur nom est justifié par l'injectivité que nous verrons ci-dessous.

Si $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est engendrée par une variable aléatoire X et si X' est une variable aléatoire de même loi que X, la formule $\Psi(g \circ X) = g \circ X'$ définit un plongement. Un autre exemple, très utile, est l'apport d'information indépendante : $(\Omega_1, \boldsymbol{\mathcal{A}}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2, \mathbb{P}_2)$ se plongent canoniquement dans $(\Omega_1, \boldsymbol{\mathcal{A}}_1, \mathbb{P}_1) \times (\Omega_2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2, \mathbb{P}_2)$.

PROPOSITION 2. — a) *Soit* Ψ *un plongement de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$. *Il est linéaire, injectif et continu pour la convergence en probabilité ; sa restriction à tout espace* L^p *est une isométrie. Si* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *est une sous-tribu de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, *il existe une unique sous-tribu* $\Psi(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ *de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ *telle que* Ψ *soit une bijection entre* $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathbb{P})$ *et* $\mathrm{L}^0(\Omega', \Psi(\boldsymbol{\mathcal{B}}), \mathbb{P}')$, *et l'on a* $Y = \mathbb{E}[Z|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ *si et seulement si* $\Psi(Y) = \mathbb{E}'[\Psi(Z)|\Psi(\boldsymbol{\mathcal{B}})]$.

Un processus M *est une martingale (respectivement une semimartingale) pour une filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *sur* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *si et seulement si, avec des notations évidentes, le processus* $\Psi(M)$ *est une martingale (respectivement une semimartingale) pour la filtration* $\Psi(\boldsymbol{\mathcal{F}})$. *La prévisibilité, les crochets et l'intégration stochastique se transfèrent de même.*

Le composé de deux plongements est un plongement.

b) *Soit* Ψ *un morphisme presque sûr de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$. *Il existe une probabilité* $\mathbb{Q}$ *absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$ *telle que* Ψ *soit un plongement de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{Q})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$. *Deux variables* X *et* Y *de* $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *vérifient* $\Psi(X) = \Psi(Y)$ *si et seulement si* $X = Y$ *p. s. pour* $\mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION. — L'injectivité vient de ce que si $\Psi(X) = 0$, X et 0 ont même loi, donc $X = 0$. Pour l'unicité de $\Psi(\boldsymbol{\mathcal{B}})$, rappelons que nous ne considérons que des sous-tribus contenant tous les événements négligeables. Le reste du a) résulte immédiatement des définitions des objets transportés. Pour le b), il suffit de définir $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Q}(X) = \mathbb{E}'[\Psi(X)]$ pour tout élément positif X de $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$. ∎

Il y a beaucoup de variables aléatoires, beaucoup de fonctions boréliennes, et donc beaucoup de conditions à vérifier pour s'assurer qu'une application de $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ dans $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}}')$ est un plongement. Lorsque la tribu $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est essentiellement séparable, le lemme ci-dessous permet de ne vérifier qu'une famille dénombrable de conditions. Rappelons que les opérations booléennes à n arguments sont les applications de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$; par un petit abus de langage, nous les ferons opérer sur les événements.

LEMME 1. — *Soient* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *et* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *deux espaces probabilisés,* $\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$ *une algèbre de Boole engendrant* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, *et* Ψ° *une application de* $\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$ *dans* $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ *qui commute avec les opérations booléennes et qui préserve les probabilités :*

(i) *pour tout* n, *tous* $B_1, ..., B_n$ *dans* $\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$ *et toute opération booléenne* R *à* n *arguments,*

$$\Psi^\circ\big[R(B_1, ..., B_n)\big] = R\big(\Psi^\circ(B_1), ..., \Psi^\circ(B_n)\big) \qquad \textit{p. s.;}$$

(ii) *pour tout* $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$, $\mathbb{P}'\big(\Psi^\circ(B)\big) = \mathbb{P}(B)$.

Il existe un unique plongement Ψ *de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *tel que l'on ait* $\Psi(\mathbb{1}_B) = \mathbb{1}_{\Psi^\circ(B)}$ *pour tout* $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$.

DÉMONSTRATION. — Soient $B_1, ..., B_n \in \boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum \alpha_i \, \mathbb{1}_{B_i} = 0$ presque sûrement. Pour toute partie J de $\{1, ..., n\}$ telle que $\sum\limits_{j \in J} \alpha_j \neq 0$, l'événement

$$\Big(\bigcap_{j \in J} B_j\Big) \;\cap\; \Big(\bigcap_{k \in J^{\mathrm{c}}} B_k^{\mathrm{c}}\Big) \,,$$

sur lequel $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} = \sum_{j\in J} \alpha_j$, est négligeable ; son image par Ψ°,

$$\Big(\bigcap_{j\in J} \Psi^\circ(B_j)\Big) \cap \Big(\bigcap_{k\in J^c} \Psi^\circ(B_k^c)\Big) ,$$

l'est donc aussi (préservation des probabilités), d'où $\sum \alpha_i \mathbb{1}_{\Psi^\circ(B_i)} = 0$ p. s. Il est donc possible de définir une application Φ sur l'ensemble $\mathrm{L}^\circ(\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ)$ de toutes ces combinaisons par $\Phi\big[\sum \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}\big] = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{\Psi^\circ(B_i)}$; on a ainsi une application de $\mathrm{L}^\circ(\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ)$ dans $\mathrm{L}^0(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ qui préserve les lois des v. a. et vérifie, pour tout n et toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, l'identité

$$\Phi\big(f\circ(X_1, ..., X_n)\big) = f\circ\big(\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n)\big) .$$

La convergence en probabilité sur Ω et Ω' peut être définie par les distances $d(X, Y) = \mathbb{E}\big[|X-Y| \wedge 1\big]$ et $d'(X', Y') = \mathbb{E}'\big[|X'-Y'| \wedge 1\big]$; pour ces distances, Φ est une injection isométrique de $\mathrm{L}^\circ(\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ)$ dans $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}}')$, car il préserve les lois. Puisque $\mathrm{L}^\circ(\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ)$ est un sous-ensemble dense de $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ et que $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ et $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}}')$ sont complets, Φ se prolonge de façon unique en une injection isométrique Ψ de $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ dans $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}}')$; en particulier, Ψ est continue.

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$, l'identité

$$\Psi\big(f\circ(X_1, ..., X_n)\big) = f\circ\big(\Psi(X_1), \dots, \Psi(X_n)\big) ,$$

vraie sur $\mathrm{L}^\circ(\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ)$, s'étend par continuité à tous les $X_1, ..., X_n \in \mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$. Pour $X_1, ..., X_n$ fixés dans $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$, la classe des fonctions boréliennes f pour lesquelles cette identité est vraie est stable par les limites simples de suites ; comme elle contient les fonctions continues, elle contient toutes les fonctions boréliennes. Ainsi, Ψ est un morphisme presque sûr.

Enfin l'unicité résulte de ce que, quand B décrit $\boldsymbol{\mathcal{B}}^\circ$, $\mathbb{1}_B$ parcourt un ensemble total dans $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$. ∎

Définitions. — *Un* isomorphisme d'espaces probabilisés *est un plongement* Ψ *de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *tel que l'application* $\Psi : \mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}) \to \mathrm{L}^0(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *soit surjective.*

Un espace filtré $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ *est un espace probabilisé* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *pourvu d'une filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (qui vérifie les conditions habituelles).

Un isomorphisme d'espaces filtrés *entre* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ *et* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}', \boldsymbol{\mathcal{F}}')$ *est un isomorphisme* Ψ *de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ *tel que* $\Psi(\boldsymbol{\mathcal{F}}) = \boldsymbol{\mathcal{F}}'$.

Par exemple, si X et X' ont même loi, le plongement de $\big(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P}\big)$ dans $\big(\Omega', \sigma(X'), \mathbb{P}'\big)$ qui transforme X en X' est un isomorphisme.

L'inverse d'un isomorphisme en est aussi un. Tout plongement Ψ de $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ est aussi un isomorphisme entre $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \Psi(\boldsymbol{\mathcal{A}}), \mathbb{P}')$. Si, pour $i \in \{1, 2\}$, $(\Omega_i, \boldsymbol{\mathcal{A}}_i, \mathbb{P}_i)$ est isomorphe à $(\Omega'_i, \boldsymbol{\mathcal{A}}'_i, \mathbb{P}'_i)$, alors $(\Omega_1, \boldsymbol{\mathcal{A}}_1, \mathbb{P}_1)\times(\Omega_2, \boldsymbol{\mathcal{A}}_2, \mathbb{P}_2)$ est isomorphe à $(\Omega'_1, \boldsymbol{\mathcal{A}}'_1, \mathbb{P}'_1)\times(\Omega'_2, \boldsymbol{\mathcal{A}}'_2, \mathbb{P}'_2)$.

La structure des espaces probabilisés essentiellement séparables, rappelée par la proposition 3 ci-dessous, est extrêmement simple : leur partie diffuse est isomorphe à un intervalle réel, muni de sa mesure de Lebesgue. Cette proposition peut être déduite des théorèmes de structure des algèbres de mesures homogènes ; voir par exemple Maharan [13].

Proposition 3. — a) *À isomorphisme près, un espace probabilisé essentiellement séparable est caractérisé par la liste des probabilités de ses atomes, rangées par ordre décroissant (avec des répétitions pour les atomes de même masse ; la liste peut être vide, finie ou infinie). En particulier, tous les espaces probabilisés essentiellement séparables et sans partie atomique sont isomorphes.*

b) *Deux espaces probabilisés essentiellement séparables et plongeables chacun dans l'autre sont isomorphes.*

Démonstration. — a) Si $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé essentiellement séparable, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est engendrée par une variable aléatoire réelle X ; soit F la partie continue de la fonction de répartition de X, de sorte que $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty)$ est la masse totale de la partie non atomique. Soit $(A_1, A_2, ...)$ une liste des atomes de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ par ordre de masses décroissantes. La v. a. Y, égale à n sur l'atome A_n et à $F\circ X$ hors des atomes, engendre aussi $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, et sa loi ne dépend que de la liste $\big(\mathbb{P}(A_1), \mathbb{P}(A_2), ...\big)$. Si $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ et $(\Omega'', \boldsymbol{\mathcal{A}}'', \mathbb{P}'')$ ont la même liste de masses atomiques, les v. a. Y' et Y'' ainsi obtenues ont même loi, et il existe donc un isomorphisme entre ces espaces, qui transforme Y' en Y''.

b) Nous allons utiliser le a) en caractérisant à isomorphisme près un espace probabilisé essentiellement séparable par la fonction $M : \left]0,1\right] \longrightarrow [0,1]$ ainsi définie : pour $0 < x \leqslant 1$, $M(x)$ est la somme des probabilités de tous les atomes A qui vérifient $\mathbb{P}(A) > x$. C'est une fonction décroissante et continue à droite; pour tout $x > 0$, le nombre d'atomes de masse x est égal à $(1/x)\big(M(x-) - M(x)\big)$; en particulier, les masses des atomes sont les abscisses des sauts de M.

Pour établir le b), il suffit de montrer que *s'il existe un plongement de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$, *les fonctions M et M' associées à ces espaces vérifient $M' \leqslant M$.* L'existence d'un plongement dans l'autre sens montrera l'inégalité inverse, d'où $M = M'$, et le a) donnera l'isomorphisme.

Soit donc Ψ un plongement de $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$. Appelons $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ (respectivement $\boldsymbol{\mathcal{H}}'$) l'ensemble des atomes de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ (respectivement $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$).

Puisque $\Psi(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ est une sous-tribu de $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$, tout atome de $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ est inclus dans un atome de $\Psi(\boldsymbol{\mathcal{A}})$; ceci définit une application F de $\boldsymbol{\mathcal{H}}'$ dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ telle que l'on ait $\Psi\big(F(A')\big) \supset A'$ pour tout $A' \in \boldsymbol{\mathcal{H}}'$. Cette F augmente les probabilités : $\mathbb{P}\big(F(A')\big) = \mathbb{P}'\big[\Psi\big(F(A')\big)\big] \geqslant \mathbb{P}'(A')$; plus généralement, si $\boldsymbol{\mathcal{K}}'$ est une partie quelconque de $\boldsymbol{\mathcal{H}}'$, en notant $F(\boldsymbol{\mathcal{K}}') = \big\{F(A')\,,\ A' \in \boldsymbol{\mathcal{K}}'\big\}$ et en remarquant que

$$\Psi\Big[\bigcup_{A\in F(\boldsymbol{\mathcal{K}}')} A\Big] = \Psi\Big[\bigcup_{A'\in\boldsymbol{\mathcal{K}}'} F(A')\Big] = \bigcup_{A'\in\boldsymbol{\mathcal{K}}'} \Psi\big(F(A')\big) \supset \bigcup_{A'\in\boldsymbol{\mathcal{K}}'} A'\ ,$$

on peut écrire

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{A\in F(\boldsymbol{\mathcal{K}}')} A\Big] \geqslant \mathbb{P}'\Big[\bigcup_{A'\in\boldsymbol{\mathcal{K}}'} A'\Big]\ .$$

Pour $x > 0$, posons $\boldsymbol{\mathcal{K}}_x = \{A \in \boldsymbol{\mathcal{H}}\ :\ \mathbb{P}(A) > x\}$ et $\boldsymbol{\mathcal{K}}'_x = \{A' \in \boldsymbol{\mathcal{H}}'\ :\ \mathbb{P}'(A') > x\}$. Comme F augmente les probabilités, on a $\mathbb{P}\big(F(A')\big) > x$ pour tout A' tel que $\mathbb{P}'(A') > x$, d'où $F(\boldsymbol{\mathcal{K}}'_x) \subset \boldsymbol{\mathcal{K}}_x$, et l'inégalité ci-dessus entraîne

$$M(x) = \mathbb{P}\Big[\bigcup_{A\in\boldsymbol{\mathcal{K}}_x} A\Big] \geqslant \mathbb{P}\Big[\bigcup_{A\in F(\boldsymbol{\mathcal{K}}'_x)} A\Big] \geqslant \mathbb{P}'\Big[\bigcup_{A'\in\boldsymbol{\mathcal{K}}'_x} A'\Big] = M'(x)\ . \qquad \blacksquare$$

Proposition 4. — *Dans* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$*, soient* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *deux sous-tribus indépendantes. Il existe un unique morphisme presque sûr* Ψ *de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathbb{P}) \times (\Omega, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P})$ *tel que, si* B *(respectivement* C*) est une variable aléatoire mesurable pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *(respectivement* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$*), on ait* $\Psi(BC)(\omega_1, \omega_2) = B(\omega_1)\, C(\omega_2)$*. C'est un isomorphisme.*

Démonstration. — Si X est une v. a. sur Ω, définissons des v. a. X' et X'' sur $\Omega\times\Omega$ par $X'(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)$ et $X''(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_2)$.

Toute v. a. mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est de la forme $f(B, C)$ où B et C sont respectivement mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, et où f est borélienne. Si Ψ existe, on doit avoir $\Psi(B) = B'$ et $\Psi(C) = C''$, d'où $\Psi\big(f(B, C)\big) = f(B', C'')$; ceci établit l'unicité.

Pour l'existence, remarquons que si B_1 et B_2 (respectivement C_1 et C_2) sont des v. a. mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ (respectivement $\boldsymbol{\mathcal{C}}$), les vecteurs $\vec{B} = (B_1, B_2)$ et $\vec{B}' = (B'_1, B'_2)$ ont même loi, et de même $\vec{C} = (C_1, C_2)$ et $\vec{C}'' = (C''_1, C''_2)$. Comme de plus $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont indépendants, ainsi que $\vec{B}'$ et $\vec{C}''$, $(\vec{B}, \vec{C})$ a même loi que $(\vec{B}', \vec{C}'')$. Donc, si f et g sont deux fonctions boréliennes, $f(B_1, C_1) - g(B_2, C_2)$ a même loi que $f(B'_1, C''_1) - g(B'_2, C''_2)$. Et si la première différence est nulle, la seconde aussi; il est donc possible de définir Ψ par $\Psi\big(f(B, C)\big) = f(B', C'')$ sans créer d'ambiguïté; ceci définit un morphisme presque sûr. En prenant $g = 0$, on voit que Ψ préserve les lois, c'est donc un plongement. Enfin, la propriété d'isomorphisme vient de ce que toute v. a. mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}\otimes\boldsymbol{\mathcal{C}}$ est de la forme $f(B', C'')$. ∎

Corollaire 1. — *Sur* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$*, soient* X *et* Y *deux variables aléatoires de même loi et* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *une sous-tribu indépendante de* X *et indépendante de* Y*. Il existe un unique isomorphisme entre* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(X), \mathbb{P})$ *et* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(Y), \mathbb{P})$ *qui soit l'identité sur* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathbb{P})$ *et qui change* X *en* Y*.*

Démonstration. — Par la proposition précédente, on se ramène à l'isomorphisme

$$(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathbb{P}) \times (\Omega, \sigma(X), \mathbb{P}) \quad \simeq \quad (\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathbb{P}) \times (\Omega, \sigma(Y), \mathbb{P})\ . \qquad ∎$$

Lemme 2. — *Étant donné* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$*, soient* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*,* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *trois sous-tribus de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$*. On suppose* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *essentiellement séparable et incluse dans* $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *; on suppose aussi* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *indépendante de* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *et de* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$*. Il existe alors un plongement de* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \mathbb{P})$ *dans* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P})$*.*

Remarque. — Si l'on suppose en outre $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ indépendante de $\boldsymbol{\mathcal{C}}\vee\boldsymbol{\mathcal{D}}$, on a, sans utiliser la séparabilité, un résultat plus fort : $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est incluse dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}$.

Démonstration. — On ne restreint pas la généralité en supposant que $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\boldsymbol{\mathcal{C}}$. La proposition 4 permet alors, via un isomorphisme Φ, de travailler sur le produit $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}') = (\Omega_1, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \mathbb{P}_1) \times (\Omega_2, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P}_2)$, où $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ et où $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont les restrictions de $\mathbb{P}$ à $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{C}}$. Appelons $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ la tribu $\Phi(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ sur Ω', c'est-à-dire la tribu produit $\boldsymbol{\mathcal{B}} \otimes \{\varnothing, \Omega_2\}$ augmentée de tous les négligeables. Avec ces notations, la tribu $\boldsymbol{\mathcal{D}}' = \Phi(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ est une tribu sur Ω', indépendante de $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$. Toute v. a. X sur l'espace produit admet une version mesurable pour la tribu produit $\boldsymbol{\mathcal{B}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{C}}$ non complétée. Pour une telle version et pour tout $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, si X est bornée le théorème de Fubini appliqué à $\mathbb{1}_B(\omega_1)\, X(\omega_1, \omega_2)$ dit que $\mathbb{1}_B(\omega_1)\, \mathbb{E}_2\big[X(\omega_1, \,.\,)\big]$ dépend mesurablement de ω_1 et admet $\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_B\, X\big]$ pour intégrale en ω_1. Il en résulte que

$$\int X(\omega_1, \hat{\omega}_2)\, \mathbb{P}_2(d\hat{\omega}_2) = \mathbb{E}'\big[X|\boldsymbol{\mathcal{B}}'\big](\omega_1, \omega_2) \quad \text{pour presque tout } (\omega_1, \omega_2).$$

Soit $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$ une algèbre dénombrable dense dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}$. Pour chaque $D \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$, notons $D' = \Phi(D)$ et choisissons un représentant de D' mesurable pour la tribu produit $\boldsymbol{\mathcal{B}} \otimes \boldsymbol{\mathcal{C}}$ non complétée; ce représentant restera fixé pour toute la suite. Pour presque tout (ω_1, ω_2), on a $\mathbb{P}_2\{\hat{\omega}_2 : (\omega_1, \hat{\omega}_2) \in D'\} = \mathbb{P}'[D'|\boldsymbol{\mathcal{B}}'](\omega_1, \omega_2) = \mathbb{P}'[D'] = \mathbb{P}[D]$, où la première égalité presque sûre s'obtient en prenant $X = \mathbb{1}_{D'}$ dans la formule vue ci-dessus, et où la deuxième égalité presque sûre vient de l'indépendance entre D' et $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$. Ainsi, pour presque tout ω_1, $\mathbb{P}_2\{\hat{\omega}_2 : (\omega_1, \hat{\omega}_2) \in D'\} = \mathbb{P}[D]$. Puisque $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$ est dénombrable, il existe un événement négligeable $N \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ tel que, pour tout $\omega_1 \in N^c$, les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) pour tout $D \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$, on a $\mathbb{P}_2\{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in D'\} = \mathbb{P}[D]$;

(ii) pour tout n, tous D_1, ..., D_n dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$ et toute relation booléenne R à n arguments telle que $R(\mathbb{1}_{D_1}, ..., \mathbb{1}_{D_n})$ p. s., on a $R\big(\mathbb{1}_{D'_1}(\omega_1, \omega_2), ..., \mathbb{1}_{D'_n}(\omega_1, \omega_2)\big)$ pour presque tout ω_2.

Fixons un $\omega_1 \in N^c$ et posons $\Psi^\circ(D) = \{\omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in D'\}$ pour $D \in \boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$. Ceci définit une application de $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$ dans $\boldsymbol{\mathcal{C}}$, qui préserve la loi grâce à la propriété (i). Pour des D_i dans $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$ et si R est une opération booléenne, en posant $\Delta = R(D_1, ..., D_n)$, la propriété (ii) appliquée à la relation à $n{+}1$ arguments $\delta = R(d_1, ..., d_n)$ donne l'égalité presque sûre $\Psi^\circ(\Delta) = R\big(\Psi^\circ(D_1), ..., \Psi^\circ(D_n)\big)$. [Cette égalité presque sûre n'est en général pas une identité parce que nous n'avons pris aucune précaution de compatibilité en choisissant les représentants des éléments de $\boldsymbol{\mathcal{D}}^\circ$.] Les hypothèses du lemme 1 étant vérifiées, Ψ° peut être prolongée en un plongement Ψ de $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{D}}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega_2, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P}_2) = (\Omega, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P})$. ∎

La méthode de Tsirelson utilise, de façon tout à fait essentielle, le joli théorème de convergence ci-dessous; il semble classique chez les probabilistes russes sous le nom de « lemme de Slutsky », mais nous n'avons pas réussi à le trouver dans la littérature. Même dans le cas où $S = S' = \mathbb{R}$, il est nouveau pour nous; les énoncés voisins que nous connaissions, tels le lemme (5.7) du chapitre 0 de [18], donnent seulement des convergences en loi. Pour une généralisation de ce théorème, voir la note de F. Delbaen [5] dans ce volume.

Théorème 1. — *Soient (S', δ') et (S, δ) deux espaces métriques séparables et h une application borélienne de S' dans S. Si $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans (S', δ') qui converge en probabilité vers une limite X, et si les X^k ont toutes même loi, alors $h \circ X^k$ tend en probabilité vers $h \circ X$.*

En d'autres termes, les plongements Ψ^k de $(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ dans $(\Omega, \sigma(X^k), \mathbb{P})$ tels que $\Psi^k(X) = X^k$ convergent vers l'identité.

Remarque. — L'hypothèse de séparabilité de S assure que la tribu borélienne sur $S{\times}S$ est le produit par elle-même de la tribu borélienne sur S; et de même sur S'. Lorsque cette hypothèse n'est pas réalisée, la fonction δ sur $S{\times}S$ peut ne pas être mesurable pour la tribu produit et $\delta(X, Y)$ n'est donc pas toujours une variable aléatoire. On pourrait aussi remplacer cete hypothèse par une définition, et exiger que toute variable aléatoire dans un espace métrique prenne ses valeurs dans un sous-espace séparable.

Démonstration du théorème 1. — Supposons d'abord h continue. De toute sous-suite de la suite $(h{\circ}X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-sous-suite $(h{\circ}X^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $X^{k_j} \to X$ p. s., donc aussi telle que $h{\circ}X^{k_j} \to h{\circ}X$ p. s. et a fortiori telle que $h{\circ}X^{k_j} \to h{\circ}X$ en probabilité; le résultat en découle (sans utiliser l'hypothèse que les X^k ont même loi).

Pour étendre ceci à toutes les fonctions boréliennes, il suffit de vérifier que l'ensemble des $h : S' \to S$ telles que $h\circ X^k$ converge en probabilité vers $h\circ X$ est stable par limites simples. Soient donc $(h_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ et h telles que, pour tout $x \in S'$, $h_\ell(x)$ tend vers $h(x)$ quand ℓ tend vers l'infini et que, pour chaque ℓ, $h_\ell\circ X^k$ tend vers $h_\ell\circ X$ en probabilité quand n tend vers l'infini. Dans la majoration

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\delta(h\circ X^k, h\circ X) > 3\varepsilon\big] \quad \leqslant \quad & \mathbb{P}\big[\delta(h\circ X^k, h_\ell\circ X^k) > \varepsilon\big] \\ & + \ \mathbb{P}\big[\delta(h_\ell\circ X^k, h_\ell\circ X) > \varepsilon\big] \\ & + \ \mathbb{P}\big[\delta(h_\ell\circ X, h\circ X) > \varepsilon\big] \ ,\end{aligned}$$

le troisième terme est plus petit que ε pour un ℓ convenable (fixé dans la suite) car $h_\ell\circ X$ tend vers $h\circ X$ sûrement, donc en probabilité; le premier terme est égal au troisième car X^k a même loi que X; pour tout k assez grand, le deuxième terme est majoré par ε grâce à l'hypothèse sur h_ℓ, et on a donc $\mathbb{P}\big[\delta\big(h\circ X^k, h\circ X\big) > 3\varepsilon\big] \leqslant 3\varepsilon$. Ainsi, $h\circ X^k$ tend en probabilité vers $h\circ X$ et le théorème est établi. ∎

Corollaire 2. — *Soit $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires, à valeurs dans un espace métrique séparable (S,δ), toutes de même loi, et convergeant en probabilité vers une limite X. Soit $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ une sous-tribu indépendante de chaque X^k et de X. Soit Ψ^k l'isomorphisme entre $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(X), \mathbb{P})$ et $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(X^k), \mathbb{P})$ qui préserve $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et qui transforme X en X^k* (corollaire 1). *Si U est une variable aléatoire mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(X)$, les variables aléatoires $\Psi^k(U)$ convergent en probabilité vers U.*

Démonstration. — La v. a. U, mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(X)$, est de la forme $f(B,X)$ pour une v. a. $B \in \mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ et une f borélienne sur $\mathbb{R}\times S$; on a donc $\Psi^k(U) = f(B,X^k)$. Pour tout x, appelons $h(x)$ la v. a. $f(B,x) \in \mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{B}})$; h est une application borélienne de S dans l'espace métrique séparable $\mathrm{L}^0\big(\Omega, \sigma(B), \mathbb{P}\big)$, et le corollaire s'obtient en appliquant le théorème 1 à h et aux X^k. ∎

2. Martingales-araignées

Définitions. — *Soient $n \geqslant 2$ un entier, $\mathbf{E}$ un espace vectoriel de dimension $n{-}1$ et $\mathbf{U}$ un ensemble de n vecteurs de $\mathbf{E}$, de somme nulle et engendrant $\mathbf{E}$. La* toile *de l'araignée sera la réunion $\mathbf{T} = \{\lambda u\,,\ \lambda \geqslant 0\,,\ u \in \mathbf{U}\}$ des demi-droites issues de l'origine dans les directions de $\mathbf{U}$.*

Nous appellerons martingale-araignée *(sur la toile $\mathbf{T}$) toute martingale locale continue à valeurs dans $\mathbf{T}$.*

L'entier n est appelé la multiplicité *de la toile et de la martingale-araignée ; une martingale-araignée est dite* multiple *si $n \geqslant 3$.*

Une définition un peu plus contraignante, qui exige que les martingales-araignées soient de vraies martingales et pas seulement des martingales locales, figure dans le chapitre 17 de [26] ; voir aussi le chapitre 5 de [21].

Lorsque $n=2$, $\mathbf{T}$ est un espace vectoriel unidimensionnel; les martingales-araignées non multiples s'identifient dans ce cas aux martingales locales habituelles, à une dimension.

Lorsque $\mathbf{E}$ est le plan complexe $\mathbb{C}$ et $\mathbf{U}$ l'ensemble des racines cubiques de l'unité, $\mathbf{T}$ est l'ensemble des complexes y tels que $\arg y = 0 \bmod 2\pi/3$, et les martingales-araignées sont les martingales locales continues complexes Y telles que $Y^3 \in \mathbb{R}_+$.

Deux toiles $(\mathbf{E'},\mathbf{U'},\mathbf{T'})$ et $(\mathbf{E''},\mathbf{U''},\mathbf{T''})$ ayant même multiplicité n se correspondent toujours (de $n!$ manières) par un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathbf{E'}$ et $\mathbf{E''}$; le seul paramètre significatif dans la définition ci-dessus est la multiplicité n.

L'exemple complexe ci-dessus (où $n=3$) s'étend à n quelconque en prenant $\mathbf{E}$ euclidien à $n{-}1$ dimensions et en prenant pour éléments de $\mathbf{U}$ les n sommets d'un simplexe régulier inscrit dans la sphère unité; ils vérifient $\|u\| = 1$ et $<u,v> = -1/(n{-}1)$ pour $u \neq v$. Si $\mathbf{E}$ et $\mathbf{U}$ sont donnés, il est toujours possible de se ramener à ce cas par un choix convenable (unique) de la structure euclidienne.

Chaque point y de $\mathbf{T}$ peut être représenté par la famille de n nombres positifs $(y^u)_{u\in \mathbf{U}}$ dont un au plus est non nul et qui vérifient $y = \sum_{u\in\mathbf{U}} y^u u$; ces nombres y^u sont les *composantes* de y.

Lemme 3. — *Si M est la partie martingale d'une semimartingale continue Y,*

$$\int \mathbb{1}_{\{Y=0\}}\, dM = 0 \ .$$

Démonstration. — Cette intégrale est la partie martingale de $\int \mathbb{1}_{\{Y=0\}}\, dY$, qui est un processus à variation finie (voir Meyer [14], formule (12.4) page 365). ∎

Proposition 5 (c'est la proposition 17.5 de [26]). — *Soit Y un processus continu, adapté, à valeurs dans $\mathbf{T}$. C'est une martingale-araignée si et seulement si les différences $Y^u - Y^v$ entre ses composantes sont des martingales locales.*

Chaque composante Y^u est alors une sous-martingale locale, de décomposition canonique $Y^u = Y^u_0 + M^u + L$, où M^u est une martingale locale vérifiant

$$M^u = \int \mathbb{1}_{\{Y^u>0\}}\, dM^u = \int \mathbb{1}_{\{Y\neq\vec{0}\}}\, dY^u \ ,$$

et L un processus croissant ne dépendant pas de u et tel que

$$L = \int \mathbb{1}_{\{Y=\vec{0}\}}\, dL = \int \mathbb{1}_{\{Y^u=0\}}\, dY^u \ .$$

Démonstration. — Soit $v \in \mathbf{U}$. L'ensemble $\mathbf{U'} = \mathbf{U} - \{v\}$ est une base de l'espace. La base duale est $\{f^v_u, u \in \mathbf{U'}\}$, où les formes f^v_u, définies par $f^v_u(u) = 1$ et $f^v_u(w) = 0$ pour $w \in \mathbf{U'} - \{u\}$, vérifient $f^v_u(v) = f^v_u\big(-\sum_{w\in\mathbf{U'}} w\big) = -\sum_{w\in\mathbf{U'}} f^v_u(w) = -1$ et donc $f^v_u(y) = y^u{-}y^v$ pour tout y de $\mathbf{T}$.

Le processus Y est une martingale-araignée si et seulement si chacune des formes f^v_u le transforme en une martingale locale réelle (ces formes engendrent en effet le dual), c'est-à-dire si et seulement si les $Y^u{-}Y^v$ sont des martingales locales.

Soit Y une martingale-araignée. Sa composante Y^u, qui vaut aussi $(Y^u - Y^v)^+$, est une sous-martingale locale ; appelons $Y_0^u + M^u + L^u$ sa décomposition canonique. Le processus $L^u - L^v$, partie à variation finie de la martingale locale $(Y^u - Y^v)$, est nul et L^u ne dépend donc pas de u ; appelons L ce processus croissant.

Puisque M^u est la partie martingale de Y^u, on a (lemme 3) $\mathbb{1}_{\{Y^u=0\}}\, dM^u = 0$, d'où $M^u = \int \mathbb{1}_{\{Y^u>0\}}\, dM^u$. Par ailleurs, sur l'ouvert prévisible $\{Y^u > 0\}$, Y^u est égal à une martingale locale, par exemple $Y^u - Y^v$, d'où $\mathbb{1}_{\{Y^u>0\}}\, dL^u = 0$; en ajoutant cette égalité à la précédente, on a $dM^u = \mathbb{1}_{\{Y^u>0\}}\, dY^u$. En retranchant à dY^u chacun des deux membres de cette égalité, on obtient $L = \int \mathbb{1}_{\{Y^u=0\}}\, dY^u$. Pour $v \neq u$, on a $Y^u = 0$ sur l'ouvert prévisible $Y^v > 0$, donc $\mathbb{1}_{\{Y^v>0\}}\, dY^u = 0$. En sommant sur tous les v (y compris u) il vient $M^u = \int \mathbb{1}_{\{Y \neq \vec{0}\}}\, dY^u$. En prenant la partie à variation finie de $\mathbb{1}_{\{Y^v>0\}}\, dY^u = 0$, on obtient $\mathbb{1}_{\{Y^v>0\}}\, dL = 0$. Sommant en v, on voit que $\mathbb{1}_{\{Y \neq \vec{0}\}}\, dL = 0$ et on en tire $L = \int \mathbb{1}_{\{Y=\vec{0}\}}\, dL$. Les quatre égalités annoncées sont établies (elles contiennent les quatre signes $\int$ de ce paragraphe). ∎

Remarque. — Si Y est une martingale-araignée issue de l'origine, les n martingales locales $-M^u = L - Y^u$ sont orthogonales et ont le même supremum $L_t = \sup_{s \leqslant t}(-M_s^u)$. Cette propriété caractérise les martingales-araignées ; en effet, *si $(N^i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille de n martingales locales issues de 0, deux-à-deux orthogonales et ayant même processus de supremum S, alors $Y^i = S - M^i$ sont les n composantes d'une martingale-araignée.*

Pour le vérifier, il suffit d'établir que $Y^i = Y^j$ si $i \neq j$. Or le processus croissant S est porté par l'ensemble $\{N^i = S\} = \{Y^i = 0\}$, d'où $Y^i\, dS = 0$ et la formule d'intégration par parties donne $d(Y^i Y^j) = Y^i\, d(S - N^j) + Y^j\, d(S - N^i) = -(Y^i dN^j + Y^j dN^i)$. Ainsi, $Y^i Y^j$ est une martingale locale positive et issue de 0, donc nulle.

On définit une distance sur la toile $\mathbf{T}$ par $\delta(y', y'') = \sum_{u \in \mathbf{U}} |y'^u - y''^u|$. Si y' et y'' sont sur le même fil u, ou si l'un des deux est à l'origine, leur distance est $|y'^u - y''^u|$; s'ils sont sur des fils distincts, on a $\delta(y', y'') = \delta(y', \vec{0}) + \delta(\vec{0}, y'')$. Bien entendu, la topologie définie par cette distance est la restriction à $\mathbf{T}$ de la topologie usuelle dans l'espace ambiant $\mathbf{E}$, et les martingales-araignées sont continues pour cette distance. Si $\mathbf{E}$ est euclidien et si tous les vecteurs de $\mathbf{U}$ sont unitaires, $\delta(y', y'')$ est aussi la longueur du chemin le plus court qui joint y' à y'' en restant dans $\mathbf{T}$ (très jacobine, notre araignée s'interdit de lancer un fil qui ne passerait pas par l'origine).

Si Y est une martingale-araignée dans $\mathbf{T}$, sa distance à l'origine $\delta(\vec{0}, Y)$ est simplement la somme de ses composantes $\Sigma = \sum_{u \in \mathbf{U}} Y^u = \Sigma_0 + \sum_u M^u + nL$; c'est une sous-martingale locale. La proposition suivante (qui ne sera pas utilisée ensuite) dit qu'il en va de même de sa distance à tout autre point.

Proposition 6. — *Soient $v \in \mathbf{U}$ et $r > 0$; $y = rv$ est un point non nul de la toile. Soit Y une martingale-araignée, de composantes $Y^u = Y_0^u + M^u + L$; appelons Σ la somme des composantes de Y et Λ^r le temps local de Σ au point r. Le processus $\delta(y, Y)$ est une sous-martingale locale, de décomposition*

$$\delta(y, Y) = \delta(y, Y_0) + \sum_{u \neq v} M^u + \int \operatorname{sgn}(\Sigma - r)\, dM^v + (n-2)\, L + \int \mathbb{1}_{\{Y=y\}}\, d\Lambda^r .$$

Démonstration. — Posons $V = Y^v - r$ et écrivons

$$\delta(y,Y) = \sum_{u\in \mathbf{U}} \left|Y^u - y^u\right| = |Y^v - y^v| + \sum_{u\neq v} Y^u$$
$$= \delta(y,Y_0) + |V| - |V_0| + \sum_{u\neq v} M^u + (n-1)\,L\ ;$$

il reste à calculer $|V|-|V_0|$. En appelant $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ le temps local de V à l'origine, on peut écrire $|V| = |V_0| + \int \operatorname{sgn} V\,dV + \boldsymbol{\mathcal{L}}$. En y remplaçant dV par $dY^v = dM^v + dL$, on obtient $d|V| = \operatorname{sgn} V\,dM^v + \operatorname{sgn} V\,dL + d\boldsymbol{\mathcal{L}}$; nous allons évaluer chacun de ces trois termes.

En utilisant la proposition 5, le premier vaut $\operatorname{sgn} V\,dM^v = \mathbb{1}_{\{Y^v>0\}} \operatorname{sgn} V\,dM^v$; mais, sur $\{Y^v > 0\}$, on a $V = \Sigma - r$ et $\operatorname{sgn} V = \operatorname{sgn}(\Sigma - r)$. Il reste $\operatorname{sgn} V\,dM^v = \operatorname{sgn}(\Sigma - r)\,dM^v$.

Pour le deuxième terme, on remarque que sur le support de L on a $Y = \vec{0}$, d'où $Y^v = 0$, $V = -r$ et $\operatorname{sgn} V = -1$. Ce terme vaut donc $-L$.

Pour le troisième terme, on observe que, sur l'ouvert $\{Y^v > 0\}$, qui contient l'ensemble $\{V = 0\} = \{Y^v = r\} = \{Y = y\}$ qui lui-même porte $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, on a $V = Y^v - r = \Sigma - r$; ceci permet d'écrire $d\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbb{1}_{\{Y^v>0\}}\,d\boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathbb{1}_{\{Y^v>0\}}\,d\Lambda^r = \mathbb{1}_{\{Y=y\}}\,d\Lambda^r$.

Il ne reste qu'à additionner tous ces morceaux pour parvenir à la décomposition annoncée ; la propriété de sous-martingale locale en découle. ∎

Remarque. — Le terme de temps local à l'origine, $\int \mathbb{1}_{\{Y=\vec{0}\}}\,d\big(\delta(y,Y)\big)$, est égal à nL si $y = \vec{0}$ mais seulement à $(n-2)L$ si $y \neq \vec{0}$. Ceci est dû au fait que tous les débuts d'excursions contribuent à augmenter la distance à l'origine, alors que la distance à un $y \neq \vec{0}$ augmente lors des débuts des excursions dans $n-1$ directions mais diminue lors des débuts des excursions vers y, d'où le facteur $(n-1) - 1 = n - 2$.

Pour $y \in \mathbf{T} \setminus \{\vec{0}\}$, nous noterons $F(y)$ l'unique vecteur $u \in \mathbf{U}$ tel que $y^u > 0$ (c'est le fil sur lequel se trouve y) ; nous poserons aussi, par convention, $F(\vec{0}) = \vec{0}$, de sorte que F est une application de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{T}$.

Proposition 7. — *Soient (dans une même filtration) Y et Y' deux martingales-araignées sur la même toile $\mathbf{T}$. Posons $\Sigma = \delta(\vec{0},Y) = \sum_u Y^u$ et appelons M la partie martingale $\sum_{u\in\mathbf{U}} M^u$ de Σ (sa partie croissante est nL) ; définissons de même Σ' et M'.*

Le processus $\delta(Y,Y')$ est une sous-martingale locale ; plus précisément, si l'on appelle Λ son temps local en 0, on a

$$\delta(Y,Y') = \delta(Y_0,Y'_0) + \int \mathbb{1}_{\{F(Y)\neq F(Y')\}}\,(dM + dM')$$
$$+ \int \mathbb{1}_{\{F(Y)=F(Y')\}} \operatorname{sgn}(\Sigma - \Sigma')\,(dM - dM')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,\Lambda + (n-2)\left[\int \mathbb{1}_{\{Y'\neq\vec{0}\}}\,dL + \int \mathbb{1}_{\{Y\neq\vec{0}\}}\,dL'\right].$$

Démonstration. — Posons $Q = \delta(Y,Y')$. On a aussi $Q = \sum_{u\in\mathbf{U}} |Y^u - Y'^u|$, ce qui montre que Q est une semimartingale.

Tout d'abord, en appelant $(\ell^a_t)_{t\geqslant 0, a\in\mathbb{R}}$ le temps local de Q et ℓ^{a-} sa limite à gauche en a, le théorème (2 iv b) de [24] (voir aussi le théorème VI (1.7) de [18]) donne la formule $\int \mathbb{1}_{\{Q=a\}}\,dQ = \frac{1}{2}(\ell^a - \ell^{a-})$. Puisque Q est positive, $\ell^a = 0$ pour tout $a < 0$, d'où à la limite $\ell^{0-} = 0$, et $\int \mathbb{1}_{\{Y=Y'\}}\,dQ = \frac{1}{2}\ell^0 = \frac{1}{2}\Lambda$. Il reste à calculer le processus $\int \mathbb{1}_{\{Y\neq Y'\}}\,dQ$. On peut le décomposer en somme de quatre termes :

$$Q^1 = \sum_{\substack{u,v\in\mathbf{U}\\ u\neq v}} \int \mathbb{1}_{\{Y^u>0 \text{ et } Y'^v>0\}}\,dQ\,, \qquad Q^3 = \sum_{u\in\mathbf{U}} \int \mathbb{1}_{\{Y=\vec{0} \text{ et } Y'^u>0\}}\,dQ\,,$$

$$Q^2 = \sum_{u\in\mathbf{U}} \int \mathbb{1}_{\{Y^u>0\,,\,Y'^u>0 \text{ et } Y^u\neq Y'^u\}}\,dQ\,, \quad Q^4 = \sum_{u\in\mathbf{U}} \int \mathbb{1}_{\{Y'=\vec{0} \text{ et } Y^u>0\}}\,dQ\,.$$

Pour $u\neq v$, on a $Q = \Sigma + \Sigma'$ sur l'ouvert prévisible $G = \{Y^u > 0 \text{ et } Y'^v > 0\}$; d'où $\mathbb{1}_G\,dQ = \mathbb{1}_G\,d(\Sigma{+}\Sigma') = \mathbb{1}_G\,(dM{+}ndL{+}dM'{+}ndL')$. Mais G ne rencontre pas l'ensemble $\{Y=\vec{0} \text{ ou } Y'=\vec{0}\}$, qui porte L et L' ; l'égalité précédente se réduit à $\mathbb{1}_G\,dQ = \mathbb{1}_G\,(dM{+}dM')$, et, en sommant sur tous les couples $u\neq v$,

$$Q^1 = \int \mathbb{1}_{\{Y\neq\vec{0}\,,\,Y'\neq\vec{0} \text{ et } F(Y)\neq F(Y')\}}\,(dM + dM')\ .$$

Pour calculer Q^2, fixons $u\in\mathbf{U}$ et posons $V = Y^u{-}Y'^u$. L'ouvert prévisible $G = \{Y^u > 0\,,\ Y'^u > 0 \text{ et } Y\neq Y'\}$ ne rencontre pas l'ensemble $\{Y=\vec{0} \text{ ou } Y'=\vec{0}\}$, qui porte L et L'. Sur G, on a $V = \Sigma{-}\Sigma'$, $dL = dL' = 0$ et $Q = |V| \neq 0$, d'où $\mathbb{1}_G\,dQ = \mathbb{1}_G\,\mathrm{sgn}\,V\,dV = \mathbb{1}_G\,\mathrm{sgn}(\Sigma{-}\Sigma')\,(dM{-}dM')$. Sommant en u, on obtient $dQ^2 = \mathbb{1}_{\{F(Y)=F(Y') \text{ et } Y\neq Y'\}}\,\mathrm{sgn}(\Sigma{-}\Sigma')\,(dM{-}dM')$. Et comme $M{-}M'$, partie martingale de $\Sigma{-}\Sigma'$, a selon le lemme 3 une intégrale nulle sur $\{\Sigma=\Sigma'\}$ et a fortiori sur l'ensemble plus petit $\{Y=Y'\}$,

$$Q^2 = \int \mathbb{1}_{\{F(Y)=F(Y')\}}\,\mathrm{sgn}(\Sigma{-}\Sigma')\,(dM - dM')\ .$$

Passons à Q^3. Pour u fixé, l'ouvert prévisible $G = \{\Sigma < Y'^u\}$ contient l'ensemble $\{Y=\vec{0} \text{ et } Y'^u > 0\}$. Sur G, on a $Y'^u = \Sigma'$ et $Q = \Sigma' + \Sigma - 2Y^u$. On en tire $\mathbb{1}_G\,dQ = \mathbb{1}_G\,\big[dM'{+}ndL'{+}dM{+}ndL{-}2dM^u{-}2dL\big]$, et, puisque $Y'>0$ sur G, $\mathbb{1}_G\,dQ = \mathbb{1}_G\,\big[dM + dM' - 2dM^u + (n{-}2)dL\big]$. Intégrons $\mathbb{1}_{\{Y=\vec{0}\}}$ des deux côtés. Le terme dM^u disparaît grâce à la proposition 5, et il nous reste seulement $\mathbb{1}_{\{Y=\vec{0} \text{ et } Y'^u>0\}}\,dQ = \mathbb{1}_{\{Y=\vec{0} \text{ et } Y'^u>0\}}\,\big[dM + dM' + (n{-}2)dL\big]$. Sommant en u, on trouve

$$Q^3 = \int \mathbb{1}_{\{Y=\vec{0} \text{ et } Y'\neq\vec{0}\}}\,\big[dM + dM' + (n{-}2)dL\big]\ ;$$

et échangeant les rôles de Y et Y', on obtient

$$Q^4 = \int \mathbb{1}_{\{Y\neq\vec{0} \text{ et } Y'=\vec{0}\}}\,\big[dM + dM' + (n{-}2)dL'\big]\ .$$

La formule annoncée résulte de l'addition de Q_0, Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 et $\frac{1}{2}\Lambda$. ∎

Proposition 8. — *Les notations sont les mêmes que dans la proposition 7. Posons* $g_t = \sup\{s\leqslant t : Y_s = \vec{0}\}$ *et de même* $g'_t = \sup\{s\leqslant t : Y'_s = \vec{0}\}$, *avec la convention* $\sup\varnothing = 0$.

Le processus $n\,\delta(Y,Y') - (n{-}2)\,\big[\mathbb{1}_{\{Y'\circ g\neq\vec{0}\}}\Sigma + \mathbb{1}_{\{Y\circ g'\neq\vec{0}\}}\Sigma'\big]$ *est une sous-martingale locale.*

Démonstration. — Posons $S = \big((n-2)/n\big)\,\big[\mathbb{1}_{\{Y'\circ g\neq\vec{0}\}}\Sigma + \mathbb{1}_{\{Y\circ g'\neq\vec{0}\}}\Sigma'\big]$. Puisque $\Sigma = 0$ sur l'ensemble $\{Y=\vec{0}\}$, la formule du balayage (voir par exemple [25]) dit que, si H est un processus prévisible borné, $H_g\Sigma = H_0\Sigma_0 + \int H_g\,d\Sigma$ (et c'est en particulier une semimartingale). On a donc $d(H_g\Sigma) = H_g\,d\Sigma = H_g\,dM + nH_g\,dL$; mais, sur le support de dL, on a $Y_t = 0$ d'où $g_t = t$ et $H_g = H$; finalement, $d(H_g\Sigma) = H_g\,dM + nH\,dL$. En prenant $H = \big((n-2)/n\big)\,\mathbb{1}_{\{Y'\neq\vec{0}\}}$, puis en échangeant les rôles de Y et Y', on voit que S est une sous-martingale locale, de partie à variation finie $(n-2)\,\big[\mathbb{1}_{\{Y'\neq\vec{0}\}}\,dL + \mathbb{1}_{\{Y\neq\vec{0}\}}\,dL'\big]$. D'après la proposition 7, ceci est un morceau de la partie croissante de la décomposition de la sous-martingale locale $\delta(Y,Y')$; le processus $\delta(Y,Y') - S$ est donc une sous-martingale locale. ∎

Définitions. — *Soit I un ensemble dénombrable non vide. Un* mouvement brownien *à valeurs dans $\mathbb{R}^I$ est une famille indépendante $X = (X_i)_{i\in I}$ de mouvements browniens réels issus de l'origine.*

Une filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ sur $(\Omega,\boldsymbol{\mathcal{A}},\mathbb{P})$ est dite brownienne *si elle est de la forme $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_0 \vee \mathrm{Nat}\,X$, où X est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^I$, indépendant de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$.*

Théorème 2. — *Dans une filtration brownienne, toute martingale-araignée multiple issue de l'origine est identiquement nulle.*

Nous rencontrerons plus bas des énoncés plus généraux (corollaires 3 et 4) : la probabilité peut être remplacée par une autre (absolument continue), et le mouvement brownien par une martingale pure. On peut aussi localiser le théorème 2 à une partie aléatoire de $\mathbb{R}_+$; nous le ferons dans la quatrième partie (proposition 24).

Il est essentiel de supposer que la martingale-araignée est multiple (ceci sera utilisé dans l'avant-dernière ligne de la démonstration) ; les martingales-araignées à deux composantes s'identifient aux martingales locales réelles et ne peuvent évidemment satisfaire un tel énoncé.

Démonstration. — Par arrêt, il suffit de démontrer le théorème pour les martingales-araignées multiples bornées.

Soit Y une martingale-araignée bornée, issue de l'origine, à n composantes ($n \geqslant 3$), dans une filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ vérifiant $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_0 \vee \mathrm{Nat}\,X$, où X est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^I$, indépendant de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$.

Un grossissement indépendant (plus précisément, le plongement de Ω dans le produit de Ω par l'espace de Wiener) permet de supposer qu'il existe sur Ω un mouvement brownien $\tilde{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^I$ et indépendant de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\infty$. La filtration $\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_0 \vee \mathrm{Nat}\,(X,\tilde{X})$ contient $\boldsymbol{\mathcal{F}}$; $X = (X_i)_{i\in I}$ et $\tilde{X} = (\tilde{X}_i)_{i\in I}$ sont deux mouvements browniens indépendants sur $(\Omega,\boldsymbol{\mathcal{A}},\mathbb{P},\boldsymbol{\mathcal{G}})$.

Pour $-1 \leqslant r \leqslant 1$, posons $X^r = r\,X + \sqrt{1-r^2}\,\tilde{X}$. Les martingales réelles $X_i = X_i^1$ et X_i^r vérifient

$$d\langle X_i^r, X_j^r\rangle_t = r^2\,\delta_{ij}\,dt + (1-r^2)\,\delta_{ij}\,dt = \delta_{ij}\,dt\ ,$$

$$d\langle X_i, X_j^r\rangle_t = r\,\delta_{ij}\,dt\ ;$$

il en résulte en particulier que X^r est pour $\mathcal{G}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^I$. Le corollaire 1 donne un isomorphisme Ψ^r entre $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ et $\big(\Omega, \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X^r), \mathbb{P}\big)$, qui respecte $\mathcal{F}_0$ et qui transforme X en X^r.

Les tribus $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X)$ et $\Psi^r(\mathcal{F}_\infty) = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X^r)$ sont liées par l'inégalité d'hypercontractivité, qui s'énonce ainsi : *si U (respectivement U') est une variable aléatoire positive et mesurable pour $\mathcal{F}_\infty$ (respectivement $\Psi^r(\mathcal{F}_\infty)$), et si $p, q \in [1, \infty]$ sont tels que $(p-1)(q-1) \geqslant r^2$, alors*

$$\mathbb{E}\big[UU' \big| \mathcal{F}_0\big] \leqslant \mathbb{E}\big[U^{\,p} \big| \mathcal{F}_0\big]^{\frac{1}{p}}\, \mathbb{E}\big[U'^q \big| \mathcal{F}_0\big]^{\frac{1}{q}} .$$

La démonstration de cette inégalité se copie *mutatis mutandis* sur celle donnée par Neveu [16] dans le cas où I n'a qu'un élément et où $\mathcal{F}_0$ est dégénérée ; nous nous contenterons d'en rappeler le principe. Le résultat est en fait un peu plus général : *Soient, dans une même filtration, $X = (X_i)_{i\in I}$ et $X' = (X'_j)_{j\in J}$ des mouvements browniens ; la formule $d\langle X_i, X'_j\rangle = r_{ij}\, dt$ définit (presque partout pour $dt \times d\mathbb{P}$) une matrice $R = (r_{ij})_{i\in I, j\in J}$ de processus prévisibles. On suppose que ${}^tRR$ existe (séries absolument convergentes) et vérifie $(p-1)(q-1)\mathrm{Id} - {}^tRR \geqslant 0$ au sens de la positivité des matrices symétriques. Si deux v. a. positives V et V' sont respectivement des intégrales stochastiques par rapport à X et X'* (ceci est plus général que des fonctionnelles de X et X'), *alors pour tout temps d'arrêt T,*

$$\mathbb{E}\Big[V^{\frac{1}{p}} V'^{\frac{1}{q}} \Big| \mathcal{F}_T\Big] \leqslant \mathbb{E}\big[V \big| \mathcal{F}_T\big]^{\frac{1}{p}}\, \mathbb{E}\big[V' \big| \mathcal{F}_T\big]^{\frac{1}{q}} .$$

En effet, lorsque V et V' sont bornés, le membre de gauche (respectivement de droite) est la valeur à l'instant T d'une martingale (respectivement surmartingale ; c'est ici qu'est utilisée l'hypothèse sur p, q et R) de valeur finale $V^{\frac{1}{p}} V'^{\frac{1}{q}}$.

Ici, $I = J$ et $r_{ij} = r\,\delta_{ij}$; ce cas est aussi traité dans Dellacherie-Maisonneuve-Meyer [7]. Par rapport à [16] ou à [7], les conditionnements par $\mathcal{F}_0$ ne sont pas une petite coquetterie supplémentaire, mais une contrainte : en prenant U et U' mesurables pour $\mathcal{F}_0$, on voit qu'il est en général impossible de s'en dispenser. Pour $|r| < 1$, l'inégalité habituelle (inconditionnelle) traduit en effet une sorte d'indépendance partielle entre les deux tribus ; ici, les deux tribus ont une sous-tribu commune, $\mathcal{F}_0$, et l'inégalité conditionnelle ci-dessus exprime que cette indépendance partielle disparaît pour les variables aléatoires de $\mathcal{F}_0$.

L'hypercontractivité sera utilisée via le lemme suivant.

Lemme 4. — *Fixons $r \in \,]-1, 1[$. Soient G et G' des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ et $\big(\Omega, \Psi^r(\mathcal{F}_\infty)\big)$ respectivement, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, telles que, pour toute v. a. réelle T finie et mesurable pour $\mathcal{F}_0$, on ait $\mathbb{P}[G = T] = \mathbb{P}[G' = T] = 0$. On a alors $\mathbb{P}[G = G' < \infty] = 0$.*

Lorsque $\mathcal{F}_0$ est dégénérée, l'hypothèse se réduit à dire que les lois de G et G' sont diffuses, sauf peut-être des masses au point $+\infty$.

Démonstration du lemme 4. — Quitte à remplacer G et G' par $\exp G$ et $\exp G'$, on peut les supposer positives. L'hypothèse dit que G évite les temps d'arrêt de la filtration constante égale à $\mathcal{F}_0$; cela entraîne que le processus croissant $A_t = \mathbb{P}[G{<}t | \mathcal{F}_0]$ a une version continue ; il est nul en 0 et borné par 1. De même, $A'_t = \mathbb{P}[G'{<}t | \mathcal{F}_0]$ est continu, nul en 0 et borné par 1.

Pour m entier, posons $\tau_j = \inf\{t : A_t+A'_t \geqslant j/m\}$, de sorte que $\tau_{2m+1} = \infty$, et considérons les événements $E_j = \{\tau_j \leqslant G < \tau_{j+1}\}$ et $E'_j = \{\tau_j \leqslant G' < \tau_{j+1}\}$. On a

$$\mathbb{P}[E_j|\mathcal{F}_0] = \mathbb{P}[\tau_j \leqslant G < \tau_{j+1}|\mathcal{F}_0] = A_{\tau_{j+1}} - A_{\tau_j} \leqslant \frac{1}{m}$$

et de même $\mathbb{P}[E'_j|\mathcal{F}_0] = A'_{\tau_{j+1}} - A'_{\tau_j} \leqslant \dfrac{1}{m}$.

Écrivons l'inégalité hypercontractive avec $p = q = 1+|r| < 2$:

$$\mathbb{P}[E_j \cap E'_j|\mathcal{F}_0] \leqslant \mathbb{P}[E_j|\mathcal{F}_0]^{\frac{1}{p}}\,\mathbb{P}[E'_j|\mathcal{F}_0]^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\frac{1}{m}\Big)^{\frac{2}{p}} .$$

On en tire $\mathbb{P}[E_j \cap E'_j] \leqslant m^{-\frac{2}{p}}$ et, en remarquant que $\{G = G' < \infty\} \subset \bigcup_{j=0}^{2m} E_j \cap E'_j$,

$$\mathbb{P}\big[G = G' < \infty\big] \leqslant \frac{2m+1}{m^{\frac{2}{p}}} .$$

Pour conclure, il ne reste qu'à faire tendre m vers l'infini : puisque $p < 2$, le majorant tend alors vers zéro. ∎

Remarques. — La même démonstration montre plus généralement que $\mathbb{P}\big[(G,G') \in E\big] = 0$ pour toute partie E du plan telle que

$$\text{dimension de Hausdorff de } E < \frac{2}{p} = \frac{2}{1+|r|} .$$

En particulier, la loi de (G, G') néglige tous les ensembles unidimensionnels au sens de Hausdorff.

Le lemme reste vrai si l'on remplace l'hypothèse $\mathbb{P}[G = T] = \mathbb{P}[G' = T] = 0$ par la condition plus faible $\mathbb{P}[G = G' = T] = 0$. (Dans le cas où $\mathcal{F}_0$ est dégénérée, cela revient à remplacer « les lois de G et G' n'ont pas d'atomes sauf peut-être $\{+\infty\}$ » par « les lois de G et G' n'ont pas d'atomes communs sauf peut-être $\{+\infty\}$ ».) Cette extension, que nous n'utiliserons pas, est laissée au lecteur.

Fin de la démonstration du théorème 2. — Toute martingale de la filtration $\mathcal{F}$ (respectivement $\Psi^r(\mathcal{F})$) est une intégrale par rapport à X (respectivement X^r) ; c'est donc aussi une martingale dans la filtration plus grosse $\mathcal{G}$. Notre martingale-araignée Y, dans $\mathcal{F}$, est transformée par Ψ^r en une martingale-araignée Y^r dans $\Psi^r(\mathcal{F})$; Y et Y^r sont toutes deux des martingales-araignées pour $\mathcal{G}$, issues de $\vec{0}$ et bornées (donc convergentes).

La proposition 8, appliquée à Y et Y^r dans $\mathcal{G}$, fournit la sous-martingale locale $S = n\,\delta(Y,Y^r) - (n-2)\,\big[\mathbb{1}_{\{Y^r\circ g \neq \vec{0}\}}\varSigma + \mathbb{1}_{\{Y\circ g^r \neq \vec{0}\}}\varSigma^r\big]$. Comme Y et Y^r et donc aussi $\varSigma$ et $\varSigma^r$ sont bornés et issus de l'origine, S est une sous-martingale bornée, nulle en 0 ; on a donc la minoration (en posant $G = g_\infty$ et $G^r = g^r_\infty$ pour simplifier la typographie)

$$n\,\mathbb{E}[\delta(Y_\infty, Y^r_\infty)] \geqslant (n-2)\,\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{Y^r_G \neq \vec{0}\}}\varSigma_\infty + \mathbb{1}_{\{Y_{G^r} \neq \vec{0}\}}\varSigma^r_\infty\big] .$$

Sur l'événement $\{G^r < G\}$ on a $Y^r_G \neq \vec{0}$, et de même $Y_{G^r} \neq \vec{0}$ sur $\{G < G^r\}$; d'où

$$\mathbb{1}_{\{Y^r_G \neq \vec{0}\}}\varSigma_\infty + \mathbb{1}_{\{Y_{G^r} \neq \vec{0}\}}\varSigma^r_\infty \geqslant \mathbb{1}_{\{G^r < G\}}\varSigma_\infty + \mathbb{1}_{\{G < G^r\}}\varSigma^r_\infty \geqslant \mathbb{1}_{\{G \neq G^r\}}(\varSigma_\infty \wedge \varSigma^r_\infty) .$$

Mais G et G^r, derniers zéros des martingales Y et Y^r, évitent les temps d'arrêt et a fortiori les v. a. mesurables pour $\mathcal{F}_0$. On peut donc leur appliquer le lemme 4, et, sur l'événement $\{G=G^r\}$, on a $G = \infty$, donc $\Sigma_\infty = 0$. Ceci entraîne $\mathbb{1}_{\{G=G^r\}}(\Sigma_\infty \wedge \Sigma^r_\infty) = 0$, l'inégalité ci-dessus se simplifie en

$$\mathbb{1}_{\{Y^r_G \neq \vec{0}\}}\,\Sigma_\infty + \mathbb{1}_{\{Y_{G^r} \neq \vec{0}\}}\,\Sigma^r_\infty \geqslant \Sigma_\infty \wedge \Sigma^r_\infty \ ,$$

et la minoration de $\delta(Y_\infty, Y^r_\infty)$ devient

$$n\,\mathbb{E}\big[\delta(Y_\infty, Y^r_\infty)\big] \geqslant (n-2)\,\mathbb{E}\big[\Sigma_\infty \wedge \Sigma^r_\infty\big] \ .$$

Prenons maintenant $r = r_k = 1 - \frac{1}{k}$ et faisons tendre k vers l'infini. Pour presque tout ω, $X^{r_k}(\omega)$ tend vers $X(\omega)$ dans l'espace $S = \mathrm{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^I)$ muni de la convergence uniforme sur les compacts, coordonnée par coordonnée ; le corollaire 2 permet d'affirmer que chaque v. a. $U \in \mathrm{L}^0(\mathcal{F}_\infty)$ est la limite en probabilité des $\Psi^{r_k}(U)$; en particulier, $Y^{r_k}_\infty$ tend vers Y_∞ et $\Sigma^{r_k}_\infty$ vers Σ_∞ ; $\Sigma_\infty \wedge \Sigma^{r_k}_\infty$ tend donc vers Σ_∞. Comme tout le monde est borné, les convergences ont lieu dans L^1, et l'inégalité ci-dessus, écrite pour chaque r_k, devient à la limite

$$0 \geqslant (n-2)\,\mathbb{E}\big[\Sigma_\infty\big] \ .$$

Puisque Y est une martingale-araignée multiple, $n-2$ est strictement positif. On a donc $\mathbb{E}[\Sigma_\infty] \leqslant 0$, d'où $\Sigma_\infty = 0$, c'est-à-dire $Y_\infty = \vec{0}$, et Y est identiquement nulle. ∎

3. Application aux temps honnêtes

La première application que nous allons donner du théorème 2 est la réponse à une question soulevée dans [4] : si L est la fin d'un ensemble optionnel dans une filtration brownienne, la tribu $\mathcal{F}_{L+}$ ne peut pas être beaucoup plus grosse que $\mathcal{F}_L$. Les définitions qui suivent nous permettront d'énoncer ceci de façon précise. Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est aussi le nombre maximal de valeurs différentes que peut prendre une v. a., ou encore le nombre maximal d'événements non négligeables et deux-à-deux disjoints. Si maintenant $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, ces équivalences subsistent conditionnellement à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire en considérant comme constantes les v. a. mesurables pour $\mathcal{B}$; la dimension devient alors elle-même une v. a. mesurable pour $\mathcal{B}$; elle est introduite ci-dessous sous le nom de multiplicité conditionnelle de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{B}$.

Définitions et notations. — *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $A \in \mathcal{A}$, nous noterons $\mathcal{A}_{|A}$ la tribu trace $\{B \in \mathcal{A} : B \subset A\}$ de $\mathcal{A}$ sur A.*

Nous appellerons $\mathcal{Q}$ l'ensemble de toutes les partitions finies et mesurables de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour $Q \in \mathcal{Q}$, $|Q|$ est le nombre d'éléments de Q ; si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, l'événement $S_{\mathcal{B}}(Q) = \{\forall A \in Q \;\; \mathbb{P}[A|\mathcal{B}] > 0\}$ sera appelé le support de Q relatif à $\mathcal{B}$ *; cet événement est dans $\mathcal{B}$, il est défini à un négligeable près.*

La multiplicité conditionnelle de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{B}$ *est la variable aléatoire définie presque partout, mesurable pour $\mathcal{B}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$*

$$\mathrm{Mult}\big[\mathcal{A}|\mathcal{B}\big] = \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}} |Q|\, \mathbb{1}_{S_{\mathcal{B}}(Q)} \ .$$

La quantité déterministe $\|\mathrm{Mult}[\mathcal{A}|\mathcal{B}]\|_{\mathrm{L}^\infty} = \inf\{n : \mathrm{Mult}[\mathcal{A}|\mathcal{B}] \leqslant n \text{ p. s.}\} \leqslant \infty$ est introduite dans [4] et désignée par *mult* $[\mathcal{A}|\mathcal{B}]$; nous ne l'utiliserons pas.

Proposition 9. — *Soient* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *une sous-tribu de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$.

a) *On a* $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant 1$ *; l'égalité* $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1$ *a lieu si et seulement si* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}$.

b) *Soit* n *un entier non nul. Pour que* $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n$ *p. s., il faut et il suffit que, pour tous événements* $A_1, ..., A_{n+1}$ *deux-à-deux disjoints, on ait* $\mathbb{P}[A_1|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \ldots \mathbb{P}[A_{n+1}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$ *p. s.*

c) *Si l'on remplace* $\mathbb{P}$ *par une probabilité équivalente,* $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ *ne change pas. Soient* $\mathbb{P}'$ *une probabilité absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$*, et* $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ *les complétées pour* $\mathbb{P}'$ *des tribus* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*. Si, à l'aide de* $\mathbb{P}'$*, on définit* $\mathrm{Mult}'[\boldsymbol{\mathcal{A}}'|\boldsymbol{\mathcal{B}}']$ *presque partout pour* $\mathbb{P}'$*, alors* $\mathrm{Mult}'[\boldsymbol{\mathcal{A}}'|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] \leqslant \mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ *p. s. pour* $\mathbb{P}'$.

Remarque. — L'inégalité dans le c) peut être stricte. C'est par exemple le cas si $\Omega = \{1, 2\}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega)$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathbb{P} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ et $\mathbb{P}' = \varepsilon_1$. On a alors $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 2$ p.s. pour $\mathbb{P}$, mais $\mathrm{Mult}'[\boldsymbol{\mathcal{A}}'|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] = 1$ p.s. pour $\mathbb{P}'$.

Démonstration de la proposition 9. — b) Par définition de $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$, on a $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n$ p. s. si et seulement si, pour toute partition mesurable Q,

$$|Q| > n \quad \Longrightarrow \quad \prod_{A \in Q} \mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0 \ \text{ p. s.}$$

Mais une partition plus fine que Q a un support plus petit, donc ceci équivaut à

$$(*) \qquad |Q| = n+1 \quad \Longrightarrow \quad \prod_{A \in Q} \mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0 \ \text{ p. s.}$$

Si $A_1, ..., A_n, A_{n+1}$ sont des événements deux-à-deux disjoints, ou bien l'un d'eux est vide, ou bien $(A_1, ..., A_n, A')$ est une partition, où A' désigne $(A_1 \cup ... \cup A_n)^{\mathrm{c}}$. La condition ci-dessus peut donc se réécrire

$$\left.\begin{array}{l} A_1, ..., A_{n+1} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ pour } i \neq j \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0 \ \text{ p. s.}$$

et le b) est démontré.

a) Prenant $Q = \{\Omega\}$ dans la définition, on obtient $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant 1$ p. s. On a donc $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1$ si et seulement si $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant 1$, et la condition $(*)$ ci-dessus donne pour $n = 2$

$$\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1 \ \text{ p. s.} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall A \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \quad \mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}]\mathbb{P}[A^{\mathrm{c}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0 \ \text{ p. s.}$$

Mais si $\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}]\mathbb{P}[A^{\mathrm{c}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$, on a $A \subset \{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\} \subset \{\mathbb{P}[A^{\mathrm{c}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0\} \subset A$ p. s., d'où $A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Réciproquement, si $A \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, alors $\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}]\mathbb{P}[A^{\mathrm{c}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$; le a) est établi.

c) Pour tout $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, $\{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\}$ est le plus petit événement (modulo les négligeables) qui soit dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et qui contienne A; il reste donc invariant lorsque l'on remplace $\mathbb{P}$ par une probabilité équivalente. Il en va de même de $S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q)$, puis de $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$.

Si maintenant $\mathbb{P}'$ est une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, pour montrer que $\mathrm{Mult}'[\boldsymbol{\mathcal{A}}'|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] \leqslant \mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ p.s. pour $\mathbb{P}'$, on peut, quitte à remplacer $\mathbb{P}'$ par une probabilité équivalente, supposer que $\mathbb{P}'$ est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[\ \ |C]$ pour un événement $C \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ non négligeable. On a alors

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}' = \{A' \subset \Omega \ : \ A' \cap C \in \boldsymbol{\mathcal{A}}\} \quad \text{ et } \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}' = \{B' \subset \Omega \ : \ \exists B \in \boldsymbol{\mathcal{B}} \ B' \cap C = B \cap C\} \ .$$

Nous devons établir que, si $Q' = (A'_1, ..., A'_k)$ est une partition de Ω mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{A}}'$, alors $|Q'|\mathbb{1}_{S'_{\boldsymbol{\mathcal{B}}'}(Q')} \leqslant \mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$ p. s. sur C, ou encore

$$|Q'|\mathbb{1}_{S'_{\boldsymbol{\mathcal{B}}'}(Q')\cap C} \leqslant \mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \quad \text{p. s.}$$

Si $\mathbb{P}[A'_i \cap C] = 0$ pour un i, alors $\mathbb{P}'[A'_i] = 0$, $S'_{\boldsymbol{\mathcal{B}}'}(Q')$ est négligeable et le premier membre est nul. Nous pouvons donc supposer $\mathbb{P}[A'_i \cap C] > 0$ pour tout i. Dans ce cas, $Q = (A'_1 \cap C, ..., A'_{k-1} \cap C, A'_k \cup C^c)$ est une partition mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, et il nous suffit de montrer que $S'_{\boldsymbol{\mathcal{B}}'}(Q') \cap C \subset S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q)$ p. s., ou encore que, pour tout $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$,

$$\{\mathbb{P}'[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] > 0\} \cap C \ \subset \ \{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\} \quad \text{p. s.}$$

Or sur C (qui est dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$), on a $\mathbb{P}'[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap C|\boldsymbol{\mathcal{B}}']}{\mathbb{P}[C|\boldsymbol{\mathcal{B}}']} = \mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}']$ p. s., et il suffit de vérifier que $\{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] > 0\} \ \subset \ \{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\}$ p. s. Mais $\{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\}$ est un événement de $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ (car $\boldsymbol{\mathcal{B}}' \supset \boldsymbol{\mathcal{B}}$) qui contient A; il contient donc aussi $\{\mathbb{P}[A|\boldsymbol{\mathcal{B}}'] > 0\}$. ∎

La définition de la multiplicité conditionnelle présente une grande part d'arbitraire : aux nombreuses caractérisations de la dimension d'un espace vectoriel correspondent toute une famille de définitions équivalentes des multiplicités conditionnelles. Ceci fait l'objet des propositions 9, 10 et 11 ci-dessous, qui devraient être évidentes. Lorsque Ω est suffisamment bon, il admet une désintégration régulière mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ (voir par exemple Halmos [9]), et $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}](\omega)$ est simplement le nombre d'éléments de l'espace probabilisé qui constitue la fibre associée à ω; ceci raccourcit considérablement les démonstrations. Dans le cas général (où nous nous plaçons), il n'y a pas de désintégrations régulières, et l'on doit se contenter des espérances conditionnelles; les démonstrations sont alors élémentaires, mais longues et ennuyeuses.

Lemme 5. — *Soit $n \geqslant 1$. Si $\mathbb{P}\big[\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant n\big] > 0$, il existe $Q \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}$ tel que $|Q| = n$ et que $S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q) = \{\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant n\}$ (modulo les négligeables).*

Démonstration. — Appelons B_n l'événement $\{\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant n\}$. Il existe une partie dénombrable $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$ telle que $\bigcup_{R\in\boldsymbol{\mathcal{R}}} S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(R) \supset B_n$ p. s. et $|R| \geqslant n$ pour tout $R \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$; on a donc $\bigcup_{R\in\boldsymbol{\mathcal{R}}} S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(R) = B_n$ p. s. Il existe des événements $E(R) \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ deux-à-deux disjoints tels que $E(R) \subset S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(R)$ p. s. et $\bigcup_{R\in\boldsymbol{\mathcal{R}}} E(R) = B_n$ p. s. Pour chaque $R \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$, soit $\{A_1^R, ..., A_n^R\}$ une partition à n éléments, moins fine que R, et donc de support plus gros : $\mathbb{P}[A_i^R|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ p. s. sur $E(R)$. Lorsque i décrit $\{1, ..., n\}$, les événements $C_i^R = A_i^R \cap E(R)$ forment une partition de $E(R)$, et les événements $D_i = \bigcup_{R\in\boldsymbol{\mathcal{R}}} C_i^R$ forment une partition de B_n. Puisque l'on a $D_i \cap E(R) = C_i^R = A_i^R \cap E(R)$, sur $E(R)$ on peut écrire $\mathbb{P}[D_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = \mathbb{P}[A_i^R|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$, d'où $\mathbb{P}[D_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B_n. Les événements $D_1 \cup B_n^c, D_2, \ldots, D_n$ forment une partition $Q \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}$ telle que $|Q| = n$ et $S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q) \supset B_n$ p. s., donc $S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q) = B_n$ p. s. ∎

Proposition 10. — *Soient $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ une sous-tribu sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$, B un événement de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et n un entier non nul. Les assertions* (i) *à* (iii) *ci-dessous sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = n$ *sur* B *;*

(ii) *il existe des événements $A_1, ..., A_n$ deux-à-deux disjoints et de réunion B, tels que $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B et que $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{|B} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$;*

(iii) *il existe des variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ telles que, pour toute variable aléatoire X, il existe un unique vecteur aléatoire $(v_1, ..., v_n)$ mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et vérifiant $v_i = 0$ sur B^c et $X = \sum v_i Y_i$ sur B.*

Proposition 11. — *Soient $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ une sous-tribu sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$, B un événement de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et n un entier non nul. Les assertions* (iv) *à* (viii) *ci-dessous sont équivalentes :*

(iv) $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant n$ *sur* B *;*

(v) *il existe des événements* $A_1, ..., A_n$ *deux-à-deux disjoints, de réunion* B *et tels que* $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ *sur* B *;*

(v') *il existe des événements* $A_1, ..., A_n$ *deux-à-deux disjoints et tels que* $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ *sur* B *;*

(vi) *il existe une variable aléatoire* X *et* n *variables aléatoires* $u_1, ..., u_n$ *mesurables pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*, vérifiant* $u_i \neq u_j$ *p. s. sur* B *pour* $i \neq j$ *et* $\mathbb{P}[X = u_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ *sur* B *;*

(vii) *il existe des variables aléatoires* $Y_1, ..., Y_n$ *telles que pour toutes variables aléatoires* $v_1, ..., v_n$ *mesurables pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *et vérifiant* $\sum_i v_i Y_i = 0$ *p. s. sur* B*, on ait* $v_1 = ... = v_n = 0$ *p. s. sur* B *;*

(viii) *à toutes variables aléatoires* $Z_1, ..., Z_{n-1}$ *on peut associer une variable aléatoire* X *telle que, pour toutes variables aléatoires* $w_1, ..., w_{n-1}$ *mesurables pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$*, on ait* $\mathbb{P}[X \neq \sum_i w_i Z_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ *sur* B*.*

Proposition 12. — *Soient* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *une sous-tribu sur* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$*,* B *un événement de* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *et* n *un entier non nul. Les assertions* (ix) *à* (xiv) *ci-dessous sont équivalentes :*

(ix) $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n$ *sur* B *;*

(x) *il existe des événements* $A_1, ..., A_n$ *deux-à-deux disjoints, de réunion* B *et tels que* $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{|B} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$ *;*

(xi) *pour tous événements* $A_1, ..., A_{n+1}$ *inclus dans* B *et deux-à-deux disjoints, on a* $\mathbb{P}[A_1|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \ldots \mathbb{P}[A_{n+1}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$ *;*

(xii) *pour toute variable aléatoire* X *il existe des variables aléatoires* $u_1, ..., u_n$ *mesurables pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *et telles que* $(X-u_1)...(X-u_n) = 0$ *p. s. sur* B *;*

(xiii) *il existe des variables aléatoires* $Y_1, ..., Y_n$ *telles que, pour toute variable aléatoire* X*, on ait* $X = \sum_i v_i Y_i$ *p. s. sur* B *pour des variables aléatoires* $v_1, ..., v_n$ *mesurables pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *;*

(xiv) *pour toutes variables aléatoires* $Z_1, ..., Z_{n+1}$*, il y a un vecteur aléatoire* $(w_1, ..., w_{n+1})$ *mesurable pour* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *tel que, p. s. sur* B*, on ait* $\sum_i w_i Z_i = 0$ *et* $(w_1, ..., w_{n+1}) \neq (0, ..., 0)$*.*

Remarque. — Dans les assertions (ii) et (v), la condition $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B assure en général que les A_i ne sont pas vides ; ils forment donc une partition. Mais il y a une exception : quand B est négligeable, les A_i ont le droit d'être vides ; c'est d'ailleurs toujours le cas quand B est lui-même vide, et les énoncés deviendraient faux si l'on y exigeait des partitions (à moins de supposer partout $\mathbb{P}[B] > 0$). C'est pour la même raison que l'hypothèse $\mathbb{P}\big[\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n\big] > 0$ est introduite dans le lemme 5 ; quand elle n'est pas satisfaite, le lemme reste vrai à condition d'autoriser les partitions à avoir des éléments vides — ce qui n'affecte d'ailleurs aucunement la définition de $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$, puisque le support relatif à $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ d'une telle « partition » est négligeable.

Démonstration des trois propositions 10, 11 et 12. — La structure logique de la démonstration est simple : nous allons montrer

(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (i) ;
(iv) ⇔ (v) ⇔ (v') ⇒ (vi) ⇒ (vii) ⇒ (viii) ⇒ (iv) ;
(x) ⇒ (xii) ⇒ (xiv) ⇒ (xi) ⇒ (ix) ⇒ (xiii) ⇒ (ix) ⇒ (x).

Malheureusement, la structure chronologique sera moins simple, car certaines de ces implications font appel à d'autres, que nous devrons donc avoir démontrées antérieurement, sous peine de nous égarer complètement.

(iv) ⇔ (v) ⇔ (v'). Si (iv) a lieu, $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant n$ sur B, et le lemme 5 donne une partition $Q = \{C_1, ..., C_n\} \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}$ telle que $S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q) \supset B$. Posons $A_i = C_i \cap B$. Sur B, on a $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = \mathbb{P}[C_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$, et (v) est établie. L'implication (v) ⇒ (v') est triviale. Supposons maintenant (v') vérifiée. Les événements $C_1 = (A_2 \cup ... \cup A_n)^{\mathrm{c}}$, $C_2 = A_2$, ..., $C_n = A_n$ forment une partition Q telle que $|Q| = n$ et $S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q) \supset B$, donc $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \geqslant n\mathbb{1}_B$, d'où (iv).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = n$ sur B. Nous venons voir que (iv) entraîne (v); il existe donc des événements $A_1, ..., A_n$ disjoints et de réunion B tels que $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B. Il reste à montrer que $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{|B} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$. Soit D un événement inclus dans A_i pour un certain i; on a $0 \leqslant \mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant \mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$. Sur $B' = \{0 < \mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] < \mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}]\}$, on a à la fois $\mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$, $\mathbb{P}[A_i - D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ et $\mathbb{P}[A_j|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ pour tout $j \neq i$. L'implication (v') $\Rightarrow$ (iv) vue plus haut, appliquée à B' et à $n+1$, fournit $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > n$ sur B'; comme $B' \subset \{\mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\} \subset B$, l'hypothèse (i) donne $\mathbb{P}[B'] = 0$. On a donc $\{\mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\} = \{\mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = \mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}]\}$; soit B'' cet événement, qui est dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. En prenant la trace sur A_i de l'inclusion

$$D \subset \{\mathbb{P}[D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0\} = B'' = \{\mathbb{P}[A_i - D|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0\} = \{\mathbb{P}[D \cup A_i^{\mathrm{c}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1\} \subset D \cup A_i^{\mathrm{c}} ,$$

on obtient $D = B'' \cap A_i$, ce qui montre que D est dans la tribu $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_i)$, et a fortiori dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$. Si maintenant C est un événement quelconque inclus dans B, c'est une union finie d'événements chacun inclus dans un A_i, il est donc aussi dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$; ceci établit (ii).

(x) $\Rightarrow$ (xii). Soient $A_1, ..., A_n$ des événements deux-à-deux disjoints, de réunion B et tels que $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{|B} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$. L'ensemble de toutes les v. a. X vérifiant $X\, \mathbb{1}_B = \sum u_i \mathbb{1}_{A_i}$, où $u_1, ..., u_n$ sont mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, est un espace vectoriel réticulé et stable par limites presque sûres de suites (si X^k converge p. s. et $X^k\, \mathbb{1}_B = \sum u_i^k \mathbb{1}_{A_i}$, poser $u_i = \mathbb{1}_B \limsup_k u_i^k$); il est donc de la forme $\mathrm{L}^0(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{C}}, \mathbb{P})$ pour une certaine une sous-tribu $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Cette sous-tribu contient les indicatrices des A_i et toutes les v. a. X telles que $X\, \mathbb{1}_B$ soit mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$; elle contient donc $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{|B^{\mathrm{c}}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$. L'hypothèse (x) donne $\boldsymbol{\mathcal{C}} = \boldsymbol{\mathcal{A}}$, toute v. a. X vérifie $X\, \mathbb{1}_B = \sum u_i \mathbb{1}_{A_i}$, et (xii) en découle.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). L'hypothèse (ii) nous fournit des événements $A_1, ..., A_n$ deux-à-deux disjoints, de réunion B, vérifiant $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B et $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{|B} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$. Nous allons montrer que les v. a. $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$ vérifient la condition (iii). La démonstration de (x) $\Rightarrow$ (xii) vue ci-dessus permet d'associer à toute v. a. X des $u_1, ..., u_n$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et tels que $X\, \mathbb{1}_B = \sum u_i \mathbb{1}_{A_i}$; on peut évidemment imposer en plus aux u_i d'être nuls hors de B. Il ne nous reste qu'à montrer l'unicité des u_i. Si des v_i vérifient les mêmes conditions, on a $\sum (u_i - v_i)\, \mathbb{1}_{A_i} = 0$; comme les A_i sont disjoints, cela entraîne $A_i \subset \{u_i = v_i\}$, puis $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant \mathbb{P}[u_i = v_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = \mathbb{1}_{\{u_i = v_i\}}$. Sur B, on a $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$, d'où $u_i = v_i$.

À ce stade de la démonstration, nous savons déjà que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii), qui, sous une hypothèse de multiplicité constante, fournit une « base conditionnelle » du module $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{A}})$ sur l'anneau $\mathrm{L}^0(\boldsymbol{\mathcal{B}})$, nous sera précieuse pour la suite. Nous allons maintenant établir la proposition 11, par la voie directe : (v) $\Rightarrow$ (vi) $\Rightarrow$ (vii) $\Rightarrow$ (viii) $\Rightarrow$ (iv).

(v) $\Rightarrow$ (vi). Prendre $X = \mathbb{1}_{A_1} + 2\mathbb{1}_{A_2} + ... + n\mathbb{1}_{A_n}$ et $u_i = i$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii). Prendre $Y_i = \mathbb{1}_{\{X = u_i\}}$. Si $\sum v_i Y_i = 0$ p. s. sur B, les v. a. suivantes sont p. s. nulles sur B : $v_i \mathbb{1}_{\{X = u_i\}}$, puis $\mathbb{1}_{\{v_i \neq 0\}} \mathbb{1}_{\{X = u_i\}}$, $\mathbb{1}_{\{v_i \neq 0\}} \mathbb{P}[X = u_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}]$, $\mathbb{1}_{\{v_i \neq 0\}}$, et finalement v_i.

(vii) $\Rightarrow$ (viii). Fixons un vecteur aléatoire $Z = (Z_1, ..., Z_{n-1})$. Pour toute v. a. X, appelons $R(X)$ la réunion essentielle

$$R(X) = \bigcup_u \mathrm{ess} \left\{\mathbb{P}[X = u \cdot Z\, |\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1\right\} ,$$

où u décrit tous les vecteurs aléatoires $(u_1, ..., u_{n-1})$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. On peut écrire $R(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k$ où les R^k sont dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, deux-à-deux disjoints, et tels qu'il existe des vecteurs aléatoires u^k vérifiant $\mathbb{P}[X = u^k \cdot Z\, |\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1$ sur R^k. Le vecteur aléatoire $u = \sum \mathbb{1}_{R^k}\, u^k$ vérifie $\mathbb{P}[X = u \cdot Z\, |\boldsymbol{\mathcal{B}}] = \mathbb{P}[X = u^k \cdot Z\, |\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1$ sur R^k, donc $\mathbb{P}[X = u \cdot Z\, |\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1$ sur $R(X)$, et l'union essentielle ci-dessus est atteinte pour un u.

En appliquant ceci aux v. a. Y_i données par l'hypothèse (vii), nous obtenons des vecteurs $u_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que, pour chaque i, on ait $R(Y_i) = \left\{\mathbb{P}[Y_i = u_i \cdot Z\, |\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 1\right\}$. On a a fortiori $Y_i = u_i \cdot Z$ p. s.sur $R(Y_i)$, et, sur l'intersection $\underline{R} = \bigcap_i R(Y_i)$, on peut écrire $Y_i = \sum u_i^k Z_k$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, où les u_i^k forment les coefficients d'une matrice aléatoire U, mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, à n lignes et $n-1$ colonnes.

Soit a une application borélienne qui à toute matrice m de dimensions $n\times(n-1)$ associe un vecteur ligne non nul v à n éléments tel que $vm = 0$.

Posons $V = a(U)$ et appelons $v_1, ..., v_n$ les éléments de V ; ce sont des v. a. mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Sur $\underline{R}$, on a $\sum v_i Y_i = 0$; l'hypothèse (vii) donne $v_i \mathbb{1}_{\underline{R}} = 0$ p. s. sur B. Comme $V \neq 0$ par définition de a, il en résulte que $\mathbb{P}(B \cap \underline{R}) = 0$. Ceci signifie qu'il existe une v. a. I mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, à valeurs dans $\{1, ..., n\}$ et telle que $B \cap \{I{=}i\} \subset R_i^{\mathrm{c}}$. La propriété (viii) a lieu avec $X = Y_I$. En effet, soient $w_1, ..., w_{n-1}$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Par définition de R_i, on a $\mathbb{P}[Y_i = w{\cdot}Z \,|\boldsymbol{\mathcal{B}}] < 1$ sur R_i^{c}, donc aussi $\mathbb{P}[Y_i \neq w{\cdot}Z \,|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur R_i^{c}. Sur $B \cap \{I = i\}$, qui est inclus dans R_i^{c}, on peut donc écrire $\mathbb{P}[Y_I \neq w{\cdot}Z \,|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = \mathbb{P}[Y_i \neq w{\cdot}Z \,|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$; on en tire $\mathbb{P}[Y_I \neq w{\cdot}Z \,|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B.

(viii) $\Rightarrow$ (iv). Nous supposons donc (viii). Pour tout $k < n$, soit B_k l'événement $\{\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = k\}$. L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) appliquée avec k et B_k donne une « base » $\{Y_1, ..., Y_k\}$. Appliquant l'hypothèse (viii) aux $n-1$ v. a. $Y_1, ..., Y_k, 0, ..., 0$; on obtient un X tel que $\mathbb{P}[X{\neq}w_1Y_1{+}...{+}w_kY_k \,|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B pour tous $w_1, ..., w_k$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. La propriété (iii) vérifiée par les Y permet de construire $v_1, ..., v_k$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ tels que le X obtenu ci-dessus vérifie $X = \sum v_i Y_i$ sur B_k. En prenant alors $w_i = v_i$ dans la propriété satisfaite par X, on obtient $\mathbb{P}[X{\neq}\sum v_iY_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B. La comparaison de ces deux relations donne $\mathbb{P}[B{\cap}B_k] = 0$, et (iv) est établie.

Ceci achève la démonstration de la proposition 11; nous passons maintenant à la proposition 12. L'implication (x) $\Rightarrow$ (xii) a été démontrée plus haut; nous allons montrer successivement (xii) $\Rightarrow$ (xiv) $\Rightarrow$ (xi) $\Rightarrow$ (ix) $\Rightarrow$ (xiii) $\Rightarrow$ (ix) $\Rightarrow$ (x).

(xii) $\Rightarrow$ (xiv). Posons $E = \mathbb{R}^{n+1}$; soient α une bijection bimesurable de E dans $\mathbb{R}$ et a une application borélienne de E^n dans E telle que, pour tous $e_1, ..., e_n$ dans E, $a(e_1, ..., e_n)$ soit non nul et orthogonal à chacun des e_i. Si Z est un vecteur aléatoire à valeurs dans E, l'hypothèse (xii) appliquée à la v. a. $X = \alpha(Z)$ donne $u_1, ..., u_n$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ et telles que l'on ait $Z \in \{\alpha^{-1}u_1, ..., \alpha^{-1}u_n\}$ p. s. sur B. Le vecteur $(w_1, ..., w_{n+1}) = a(\alpha^{-1}u_1, ..., \alpha^{-1}u_n)$ est mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, p. s. non nul, et orthogonal à Z p. s. sur B.

(xiv) $\Rightarrow$ (xi). Soient $A_1, ..., A_{n+1}$ des événements inclus dans B et deux-à-deux disjoints. L'hypothèse (xiv) appliquée aux indicatrices des A_i donne $w_1, ..., w_{n+1}$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, telles que $B \subset \bigcup_i \{w_i \neq 0\}$ et vérifiant $\sum_i w_i \mathbb{1}_{A_i} = 0$ p. s. Sur $\{w_i \neq 0\}$, on a $\mathbb{1}_{A_i} = 0$ d'où $\mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$; on a donc $\prod_i \mathbb{P}[A_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$ sur B.

(xi) $\Rightarrow$ (ix). Soit $Q = \{A_1, ..., A_k\}$ une partition mesurable de Ω telle que $|Q| = k > n$. Les événements $A'_i = A_i{\cap}B$ sont inclus dans B et deux-à-deux disjoints; en leur appliquant l'hypothèse (xi), on obtient $\mathbb{P}[A'_1|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \dots \mathbb{P}[A'_{n+1}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$, donc $\mathbb{P}[A_1|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \dots \mathbb{P}[A_{n+1}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = 0$ sur B; en conséquence, $\mathbb{P}[S_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(Q) \cap B] = 0$. Ainsi, seules les partitions vérifiant $|Q| \leqslant n$ peuvent avoir un support rencontrant B, et $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n$ sur B.

(ix) $\Rightarrow$ (xiii). Nous supposons $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n$ sur B, donc B est la réunion des événements $B_k = B \cap \{\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = k\}$ où k décrit $\{1, ..., n\}$. Pour chaque k, appliquons (i) $\Rightarrow$ (iii) à l'entier k et à l'événement B_k ; on obtient des v. a. $Y_1^k, ..., Y_k^k$ telles que toute v. a. X vérifie $X = \sum_{i\leqslant k} v_i^k Y_i^k$ sur B_k. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, posons $Y_i = \sum_{k\geqslant i} Y_i^k \mathbb{1}_{B_k}$ et $v_i = \sum_{k\geqslant i} v_i^k \mathbb{1}_{B_k}$. L'égalité $X = \sum v_i Y_i$ est en vigueur sur chaque B_k, donc sur B, et (xiii) a lieu.

(xiii) $\Rightarrow$ (ix). Soient $Y_1, ..., Y_n$ donnés par l'hypothèse (xiii); nous allons montrer que l'événement $B' = \{\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > n\}$ ne rencontre pas B. Par (iv) $\Rightarrow$ (viii) appliqué à B', à $n{+}1$ et aux Y_i, il existe X tel que, pour tous $w_1, ..., w_n$ mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, on ait $\mathbb{P}[X \neq \sum w_iY_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B'. Mais l'hypothèse (xiii) donne $v_1, ..., v_n$ tels que $X = \sum v_iY_i$ p. s. sur $\boldsymbol{\mathcal{B}}$; comme on doit aussi avoir $\mathbb{P}[X \neq \sum v_iY_i|\boldsymbol{\mathcal{B}}] > 0$ sur B', la comparaison ce ces deux relations impose $\mathbb{P}[B{\cap}B'] = 0$.

(ix) $\Rightarrow$ (x). Nous supposons $\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant n$ sur B; B est donc la réunion, lorsque k décrit $\{1, ..., n\}$, des événements $B_k = B{\cap}\{\mathrm{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] = k\}$. En appliquant à k et B_k l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), on obtient pour chaque k des événements $A_1^k, ..., A_k^k$ deux-à-deux disjoints, de réunion B_k et tels que $\mathcal{A}_{|B_k} = \mathcal{B}_{|B_k} \vee \sigma(A_i^k, 1 \leqslant i \leqslant k)$. Les événements $A_k = A_k^k \cup ... \cup A_k^n$, sont deux-à-deux disjoints et ont pour union B. La tribu $\mathcal{B}_{|B} \vee \sigma(A_1, ..., A_n)$ sur B contient tous les $A_i \cap B_k = A_i^k$, donc tous les événements de $\mathcal{A}_{|B_k}$, et donc aussi toute la tribu $\mathcal{A}_{|B}$.

Ceci achève d'établir la proposition 12 ; il ne manque plus que la proposition 10, et plus précisément (iii) $\Rightarrow$ (i), la seule implication non encore prouvée. Mais (iii) est la conjonction des deux assertions (vii) et (xiii), cette dernière traduisant l'unicité des coefficients v_i. Supposant (iii), on a donc (vii) et (xiii), qui, nous l'avons vu, entraînent respectivement (iv) et (ix), d'où $\mathrm{Mult}[\mathcal{A}|\mathcal{B}] = n$ sur B. ∎

DÉFINITION. — *Si $\mathcal{F}$ est une filtration et τ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,\infty]$, les tribus $\mathcal{F}_\tau$ et $\mathcal{F}_{\tau+}$ sont ainsi caractérisées : une variable aléatoire U est mesurable pour $\mathcal{F}_\tau$ (respectivement $\mathcal{F}_{\tau+}$) si et seulement s'il existe un processus optionnel (respectivement progressif) V, défini sur $[\![0,\infty]\!]$, tel que $U = V_\tau$.*

Il est bien connu que la continuité à droite des filtrations s'étend aux temps d'arrêt : on a $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_T$ pour tout temps d'arrêt T. Nous allons nous intéresser à une classe de temps aléatoires ne partageant pas cette propriété, les temps honnêtes, introduits par P.A. Meyer, R.T. Smythe et J.B. Walsh dans [15].

DÉFINITION. — *Une variable aléatoire L à valeurs dans $[0,\infty]$ est un* temps honnête *pour une filtration $\mathcal{F}$ s'il existe pour chaque $t \geqslant 0$ une variable aléatoire ℓ_t mesurable pour $\mathcal{F}_t$ et telle que $L = \ell_t$ sur $\{L \leqslant t\}$.*

Les temps honnêtes jouent un rôle important dans la théorie du grossissement progressif d'une filtration ; nous n'aborderons pas cet aspect.

Leurs principales propriétés sont rappelées, pour référence ultérieure, dans la proposition ci-dessous ; nous n'en démontrerons que les parties triviales, le reste sera admis. Le a) caractérise les temps honnêtes comme étant les fins des ensembles optionnels (ou progressifs, c'est équivalent puisque l'adhérence d'un ensemble progressif est optionnelle).

PROPOSITION 13. — a) *Pour qu'une variable aléatoire L à valeurs dans $[0,\infty]$ soit un temps honnête, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble optionnel $\Gamma \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ tel que l'on ait $L(\omega) = \sup\{t : (t,\omega) \in \Gamma\}$ pour tout ω (avec la convention $\sup \varnothing = 0$).*

b) *Soit L un temps honnête pour une filtration $\mathcal{F}$.*
Si τ est une variable aléatoire telle que $L \leqslant \tau \leqslant \infty$, on a $\mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_\tau$.
La suite des tribus $\mathcal{F}_{L+1/n}$ est décroissante et sa limite est $\mathcal{F}_{L+}$.
Si L et L' sont deux temps honnêtes tels que $L \leqslant L'$, on a $\mathcal{F}_{L+} \subset \mathcal{F}_{L'+}$.

c) *On suppose que toutes les martingales de $\mathcal{F}$ sont continues* (ceci revient à dire que tous les optionnels sont prévisibles). *Dans $\mathcal{F}$, soient L un temps honnête et M une martingale uniformément intégrable. Pour que $\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_L] = 0$ p. s., il faut et il suffit que $M_L = 0$ p. s.*

REMARQUE. — Le b) dit que pour L honnête, $\mathcal{F}_{L+}$ est la limite des $\mathcal{F}_{L+1/n}$. Ceci peut être précisé par les *théorèmes-quotient,* qui permettent de calculer explicitement, à l'aide de projections optionnelles, les espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{F}_{L+}$; voir [2] et [3].

DÉMONSTRATION. — a) C'est le théorème XX-13 de Dellacherie-Maisonneuve-Meyer [7].

b) Soient L un temps honnête et τ une variable aléatoire vérifiant $L \leqslant \tau \leqslant \infty$. Pour $U \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}_L)$, il existe un processus optionnel borné O, défini sur $[\![0,\infty]\!]$ et tel que $O_L = U$. Mais L est la fin d'un ensemble optionnel Γ, que l'on peut supposer fermé dans $[0,\infty]$ (voir le théorème IV-89 de Dellacherie-Meyer [6]). Le processus O' défini par $O'_t = O_{\sup(\Gamma\cap[0,t])}$ est optionnel (si O est adapté et continu à droite, O' aussi ; le cas général s'en déduit par classes monotones). Comme $O' = U$ sur $[\![L,\infty]\!]$, on a $U = O_\tau \in \mathcal{F}_\tau$ et ceci montre que $\mathcal{F}_L \subset \mathcal{F}_\tau$.

Chaque $L+1/n$ est un temps honnête, car, sur $\{L+1/n \leqslant t\}$, $L+1/n$ est égal à une v. a. mesurable pour $\mathcal{F}_{t-1/n}$. La croissance, vue plus haut, de $L \mapsto \mathcal{F}_L$ entraîne que les tribus $\mathcal{F}_{L+1/n}$ décroissent ; il reste à démontrer que la limite est $\mathcal{F}_{L+}$. L'inclusion $\mathcal{F}_{L+} \subset \mathcal{F}_{L+1/n}$ résulte immédiatement de ce que, *si X_t est un processus progressif, $X_{(t-1/n)^+}$ est optionnel* pour la filtration constante par intervalles $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_{[nt]/n}$ et a fortiori pour $\mathcal{F}$, qui est plus grosse. Enfin, pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, $\bigcap_n \mathcal{F}_{L+1/n} \subset \mathcal{F}_{L+}$, il suffit d'établir que *si (X^n) est une suite uniformément bornée de processus progressifs,* $\limsup_n X^n_{t+1/n}$ *est progressif.* Or il est clair que cette limite supérieure est progressive pour la filtration plus grosse $(\mathcal{F}_{t+1/k})$; et l'intersection des tribus progressives des filtrations $(\mathcal{F}_{t+1/k})$ est la tribu progressive de $\mathcal{F}$ par le lemme de Lindvall-Rogers (voir l'appendice de [4]).

Enfin, l'inclusion $\mathcal{F}_{L+} \subset \mathcal{F}_{L'+}$ résulte facilement de ce qui précède, en passant à la limite dans $\mathcal{F}_{L+\frac{1}{n}} \subset \mathcal{F}_{L'+\frac{1}{n}}$.

c) Cela résulte aussitôt du théorème XX-35 de Dellacherie-Maisonneuve-Meyer [7] ; voir aussi [1]. ∎

LEMME 6. — *Soit L un temps honnête pour une filtration $\mathcal{F}$; on suppose que toutes les martingales de $\mathcal{F}$ sont continues. Appelons J la projection optionnelle de $\mathbb{1}_{[\![L,\infty[\![}$ (elle est càdlàg), J_- le processus des limites à gauche de J, K l'ensemble aléatoire $\{J_- = 0\}$ et G_t la v. a.* $\sup\big(K\cap[0,t]\big)$.

(i) *Si U est une variable aléatoire mesurable pour $\mathcal{F}_{L+}$ et V un processus progressif (défini sur $[\![0,\infty]\!]$) tel que $V_L = U$, le processus $H_t = \mathbb{1}_{\{t\notin K\}} V_{G_t}$ est l'unique processus optionnel nul sur K et égal à U sur $]\!]L,\infty[\![$. L'application $\mathcal{O} : U \mapsto H$ ainsi définie est linéaire, positive et préserve les produits.*

(ii) *Si U est dans $\mathrm{L}^1(\mathcal{F}_{L+})$ et vérifie $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_L] = 0$, la martingale $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t]$ est égale au processus $\mathcal{O}(U)_t J_{t-}$; elle est nulle à l'origine.*

(iii) *Étant donné $n \geqslant 2$, soient $A_1, ..., A_n$ des événements de $\mathcal{F}_{L+}$ deux-à-deux disjoints ; soit B l'événement $\big\{\forall i \in \{1, ..., n\}\,,\ \mathbb{P}[A_i|\mathcal{F}_L] > 0\big\}$, qui est dans $\mathcal{F}_L$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, posons*

$$U^i = \frac{\mathbb{1}_{A_i\cap B}}{\mathbb{P}[A_i|\mathcal{F}_L]} \qquad \textit{(avec } \frac{0}{0} = 0\textit{)}\,.$$

On a $\mathbb{E}[U^i|\mathcal{F}_L] = \mathbb{1}_B$. Les n processus $\mathcal{O}(U^i)J_-$ sont les composantes d'une martingale-araignée uniformément intégrable, issue de l'origine et de multiplicité n.

DÉMONSTRATION. — La projection optionnelle J de $\mathbb{1}_{[\![L,\infty[\![}$ est le processus adapté et càdlàg vérifiant $J_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{P}[L \leqslant T < \infty|\mathcal{F}_T]$ pour tout temps d'arrêt T ; avec la convention $J_{0-} = 0$, on a aussi $J_{T-}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{P}[L < T < \infty|\mathcal{F}_T]$ (car $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$ et tous les optionnels sont prévisibles), et $\Delta J_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{P}[L = T < \infty|\mathcal{F}_T]$. En particulier, les sauts de J sont positifs. Le processus J est une sous-martingale bornée, et sa limite à l'infini est $J_\infty = \mathbb{1}_{\{L<\infty\}}$.

Positif et à sauts positifs, J ne peut s'annuler lors d'un saut, et $\{J=0\}$ est inclus dans $\{J_- = 0\}$; l'ensemble $K = \{J_- = 0\}$ est donc un fermé optionnel. Pour tout temps d'arrêt T, on peut écrire

$$\begin{aligned} [\![T]\!] \subset K \quad &\Leftrightarrow \quad J_{T-}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[L<T<\infty|\mathcal{F}_T] = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[L<T<\infty] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\![T]\!] \subset [\![0,L]\!] \ ; \end{aligned}$$

en conséquence, par le théorème de section, tout ensemble optionnel inclus dans $[\![0,L]\!]$ est inclus dans K.

En outre, K est lui-même inclus dans $[\![0,L]\!]$ (c'est ici qu'intervient l'honnêteté de L ; c'est d'ailleurs comme cela que l'on construit Γ dans la proposition 13 a; voir [7], XX-13); K est donc le plus grand optionnel inclus dans $[\![0,L]\!]$, et L est aussi la fin de K. La formule $G_t = \sup\big(K\cap[0,t]\big)$ définit un processus croissant, continu à droite; on a $L = G_\infty$ et, pour tout temps d'arrêt T, on a aussi $L = G_T$ sur $\{L \leqslant T\}$.

(i) Pour $\varepsilon > 0$, le processus $\mathbb{1}_{\{t\geqslant G_t+\varepsilon\}}V_{G_t}$ est adapté et continu à droite, donc optionnel; à la limite, $\mathbb{1}_{\{t>G_t\}}V_{G_t}$ est optionnel. Enfin, $\mathbb{1}_{\{t\notin K\}}V_{G_t}$, qui est égal à $\mathbb{1}_{\{t\notin K\}}\mathbb{1}_{\{t>G_t\}}V_{G_t}$, est lui aussi optionnel.

Pour $t > L$, on a $G_t = L$ et $t \notin K$, donc $H_t = U$. L'unicité de H vient de ce que deux processus optionnels égaux sur $]\!]L,\infty[\![$ diffèrent sur un optionnel inclus dans $[\![0,L]\!]$, donc dans K. Elle entraîne que $\mathcal{O}$ préserve les relations boréliennes à un nombre quelconque d'arguments, en particulier la linéarité, la positivité et les produits.

(ii) Supposons $U \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}_{L+})$ et $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_L] = 0$. Soit T un temps d'arrêt fini. Si z est dans $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}_T)$, le processus $Z = z\mathbb{1}_{[\![T,\infty]\!]}$ est optionnel, la v. a. $z\mathbb{1}_{\{L\geqslant T\}} = Z_L$ est dans $\mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}_L)$ et, puisque $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_L] = 0$, $\mathbb{E}[Uz\mathbb{1}_{\{L\geqslant T\}}] = 0$. On en déduit $\mathbb{E}[U\mathbb{1}_{\{L\geqslant T\}}|\mathcal{F}_T] = 0$, ce qui permet d'écrire, avec la même notation V qu'en (i),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_T] &= \mathbb{E}[U\mathbb{1}_{\{L<T\}}|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[V_L\mathbb{1}_{\{L<T\}}|\mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[V_{G_T}\mathbb{1}_{\{L<T\}}|\mathcal{F}_T] \\ &= V_{G_T}\,\mathbb{P}[L<T|\mathcal{F}_T] = V_{G_T}J_{T-} = \mathcal{O}(U)_T J_{T-}\ . \end{aligned}$$

Ceci établit que le processus $\mathcal{O}(U)_t J_{t-}$ est la martingale $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t]$; sa valeur initiale est $\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_L]|\mathcal{F}_0] = 0$.

(iii) Les U^i vérifient

$$\mathbb{E}[U^i|\mathcal{F}_L] = \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}[A_i|\mathcal{F}_L]>0\}}\,\frac{1}{\mathbb{P}[A_i|\mathcal{F}_L]}\,\mathbb{P}[A_i\cap B|\mathcal{F}_L] = \mathbb{1}_{\{\mathbb{P}[A_i|\mathcal{F}_L]>0\}}\,\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B\ ;$$

en particulier, $U^i \in \mathrm{L}^1(\mathcal{F}_{L+})$. Posons $H^i = \mathcal{O}(U^i)$.

Soit $\mathbf{U} = \{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ un système de n vecteurs de somme nulle engendrant un espace de dimension $n-1$. Posons $\vec{U} = \sum U^i\vec{u}_i$ et $\vec{H} = \sum H^i\vec{u}_i$. Le vecteur aléatoire $\vec{U}$ vérifie $\mathbb{E}[\vec{U}|\mathcal{F}_L] = \sum\mathbb{1}_B\vec{u}_i = \vec{0}$. Le (ii) permet d'affirmer que $Y = \vec{H}J_-$ est la martingale issue de l'origine $\mathbb{E}[\vec{U}|\mathcal{F}_t]$. De plus, pour $i \neq j$, on a $A_i\cap A_j = \varnothing$ par hypothèse, d'où $U^iU^j = 0$; cette propriété et la positivité des U^i se transfèrent par $\mathcal{O}$, donnant $H^i \geqslant 0$ et $H^iH^j = 0$, et Y est ainsi une martingale-araignée de multiplicité n, à valeurs dans la toile $\{\lambda\vec{u}_i,\ \lambda\geqslant 0\ ,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. ∎

Définition (empruntée à [4]). — *La* multiplicité de scindage *d'une filtration* $\mathcal{F}$ *est le plus petit entier* n *tel que* $\mathrm{Mult}\big[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L\big] \leqslant n$ *pour tout temps* L *honnête pour* $\mathcal{F}$ *; elle est infinie s'il n'existe aucun tel entier.* On la note $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F})$.

On a donc $1 \leqslant \mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F}) \leqslant \infty$, et $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F}) \leqslant n$ si et seulement si $\mathrm{Mult}\big[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L\big] \leqslant n$ pour tout temps honnête L.

Proposition 14. — *On suppose que, sur l'espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$, *toutes les martingales sont continues. Soit* $n \geqslant 1$ *un entier. Il y a équivalence entre les quatre conditions suivantes :*

(i) *toute martingale-araignée de multiplicité* $n{+}1$, *bornée et issue de l'origine est nulle ;*

(i') *toute martingale-araignée de multiplicité* $n{+}1$ *est nulle à partir de son premier zéro ;*

(ii) *tout temps honnête* L *vérifie* $\mathrm{Mult}\big[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L\big] \leqslant n$ *;*

(ii') $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F}) \leqslant n$.

Pour $n = 1$, la condition (i) dit que toute martingale (usuelle) bornée issue de l'origine est nulle. Ceci se produit si et seulement si $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_\infty$, c'est-à-dire si et seulement si la filtration est constante. Les filtrations constantes sont donc caractérisées par la relation $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F}) = 1$.

Démonstration de la proposition 14. — L'équivalence entre (ii) et (ii') ne fait que rappeler la définition de $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F})$.

(i) $\Rightarrow$ (i'). Supposant (i), on en déduit par arrêt que toute martingale araignée de multiplicité $n{+}1$ et issue de l'origine est nulle ; puis la condition (i') s'obtient en remarquant que, si Y est une martingale-araignée de premier zéro T, alors $Y\,\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} = \int \mathbb{1}_{]\!]T,\infty[\![}\,dY$ est, sur la même toile et dans la même filtration, une martingale-araignée, nulle à l'origine et égale à Y sur $[\![T,\infty[\![$.

(i') $\Rightarrow$ (ii). L'hypothèse entraîne que toute martingale-araignée de multiplicité $n{+}1$ et issue de l'origine est identiquement nulle. Considérons un temps honnête L. Soient $A_1, ..., A_{n+1}$ des événements dans $\mathcal{F}_{L+}$ et deux-à-deux disjoints ; appelons B l'événement $\big\{\forall i \in \{1, ..., n{+}1\}\,,\ \mathbb{P}\big[A_i|\mathcal{F}_L\big] > 0\big\}$. Le (iii) du lemme 6 fournit une martingale-araignée Y de multiplicité $n{+}1$, issue de l'origine et dont les composantes Y^i vérifient $\mathbb{E}\big[Y^i_\infty|\mathcal{F}_L\big] = \mathbb{1}_B$. L'hypothèse (i') donne $Y = 0$. Il en résulte $\mathbb{E}\big[Y^i_\infty\big] = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{P}\big[B\big] = 0$, et $\mathrm{Mult}\big[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L\big] \leqslant n$ par la proposition 9 b). Comme L est arbitraire, (ii) est établie.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons (ii) vérifiée, et soit Y une martingale-araignée de multiplicité $n{+}1$, issue de l'origine et bornée (donc convergente). Pour montrer que $Y = 0$, considérons le temps honnête $L = \sup\{Y = \vec{0}\}$. En notant Y^u les composantes de Y, les $n{+}1$ événements $A_u = \{Y^u_\infty > 0\}$ sont deux-à-deux disjoints et dans $\mathcal{F}_{L+}$. En utilisant l'hypothèse $\mathrm{Mult}\big[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L\big] \leqslant n$, la proposition 9 b) fournit $\prod_u \mathbb{P}\big[A_u|\mathcal{F}_L\big] = 0$, et la réunion des $n{+}1$ événements $B_u = \big\{\mathbb{P}\big[A_u|\mathcal{F}_L\big] = 0\big\}$ a probabilité 1. Mais, par ailleurs, la martingale $Y^u{-}Y^v$ est nulle à l'instant L, donc $\mathbb{E}\big[Y^u_\infty{-}Y^v_\infty|\mathcal{F}_L\big] = 0$ par la proposition 13 c) ; et sur B_u, on a $\mathbb{E}\big[Y^u_\infty|\mathcal{F}_L\big] = 0$, d'où $\mathbb{E}\big[Y^v_\infty|\mathcal{F}_L\big] = 0$ et $\mathbb{P}\big[A_v|\mathcal{F}_L\big] = 0$; ceci montre que $B_u \subset B_v$. Tous les B_u sont donc égaux, et chacun d'eux a probabilité 1. En conséquence, chaque A_u est négligeable, Y_∞ est p. s. nulle, et $Y = \vec{0}$. Ainsi, (ii) $\Rightarrow$ (i). ∎

THÉORÈME 3. — *Toute filtration brownienne* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *vérifie* $\operatorname{Sp Mult}(\boldsymbol{\mathcal{F}}) = 2$.

DÉMONSTRATION. — Le théorème 2 dit que toute martingale-araignée dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ de multiplicité 3 et issue de l'origine est nulle. La proposition 14 en déduit que $\operatorname{Sp Mult}(\boldsymbol{\mathcal{F}}) \leqslant 2$. Puisque $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ n'est pas constante, on a $\operatorname{Sp Mult}(\boldsymbol{\mathcal{F}}) > 1$. En fin de compte, $\operatorname{Sp Mult}(\boldsymbol{\mathcal{F}}) = 2$. ∎

Si L est un temps honnête dans une filtration brownienne $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, on a donc $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] \leqslant 2$. Il serait intéressant de savoir reconnaître les L tels que $\mathcal{F}_{L+} = \mathcal{F}_L$ (c'est-à-dire tels que $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] = 1$). C'est toujours le cas si L est un temps d'arrêt, mais cela peut aussi se produire pour bien d'autres L : par exemple, si $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien unidimensionnel X, l'instant $L \in [0,1]$ tel que $X_L = \sup_{t\leqslant 1} X_t$ vérifie $\mathcal{F}_{L+} = \mathcal{F}_L$. En effet, L est alors le dernier zéro avant 1 du mouvement brownien réfléchi $R_t = \sup_{s\leqslant t} X_s - X_t$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est la filtration naturelle de R, et l'on est ainsi ramené à la situation étudiée dans l'appendice de [4].

Plus généralement, pour un temps honnête L, comment peut-on construire l'événement $\{\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] = 1\}$, sur lequel les deux tribus coïncident ? Comment passe-t-on de $\mathcal{F}_L$ à $\mathcal{F}_{L+}$? Dans le cas brownien où $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] \leqslant 2$, les deux petites propositions qui suivent constituent un embryon d'attaque de ces questions.

PROPOSITION 15. — *Étant donné* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$, *soit* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *une sous-tribu de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. *Pour que* $\operatorname{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant 2$ *p. s., il faut et il suffit qu'il existe un événement* $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ *tel que* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A)$. *Lorsque c'est le cas, les événements* A' *tels que l'on ait* $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A')$ *sont exactement les événements de la forme* $A' = A\triangle B$, *où* B *décrit* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

DÉMONSTRATION. — L'équivalence entre (ix) et (x) dans la proposition 12, avec $n = 2$ et $B = \Omega$, dit que $\operatorname{Mult}[\boldsymbol{\mathcal{A}}|\boldsymbol{\mathcal{B}}] \leqslant 2$ si et seulement s'il existe $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ tel que $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A, A^{\mathrm{c}})$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A)$.

Pour $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ et $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$, on a $A\triangle B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A)$ et $A = (A\triangle B)\triangle B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A\triangle B)$; d'où $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A) = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A\triangle B)$. Pour établir la proposition, il reste seulement à vérifier que, si $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A_1) = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A_2)$, alors il existe $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ tel que $A_2 = A_1\triangle B$.

Supposons donc $\boldsymbol{\mathcal{A}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A_1) = \boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A_2)$. L'événement $A_1\backslash A_2$ est inclus dans A_1 et mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A_1)$, il est donc de la forme $B_1\cap A_1$ pour un B_1 dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$; inclus dans A_2^{c} et mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{B}}\vee\sigma(A_2)$, il est aussi de la forme $B_2\cap A_2^{\mathrm{c}}$ où $B_2 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$. De $A_1\cap A_2^{\mathrm{c}} = B_1\cap A_1$, on déduit $B_1 \subset A_1^{\mathrm{c}} \cup A_2^{\mathrm{c}}$; de $A_1\cap A_2^{\mathrm{c}} = B_2\cap A_2^{\mathrm{c}}$, on tire $B_2 \subset A_1 \cup A_2$; on peut donc écrire

$$A_1\backslash A_2 \subset B_1\cap B_2 \subset (A_1^{\mathrm{c}}\cup A_2^{\mathrm{c}}) \cap (A_1\cup A_2) = A_1\triangle A_2 \ .$$

En posant $B = B_1\cap B_2$, ceci met en évidence un événement B dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ tel que

$$A_1\backslash A_2 \subset B \subset A_1\triangle A_2 \ ;$$

par symétrie, il existe de même B' dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ tel que $A_2\backslash A_1 \subset B' \subset A_1\triangle A_2$, et l'on a

$$A_1\triangle A_2 = (A_1\backslash A_2) \cup (A_2\backslash A_1) \subset B \cup B' \subset A_1\triangle A_2 \ .$$

Ceci entraîne $A_1\triangle A_2 = B \cup B'$, puis $A_2 = A_1\triangle(B\cup B')$. ∎

Même lorsque L est un temps honnête dans la filtration naturelle $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ d'un brownien réel X, nous ne savons pas s'il est possible d'écrire explicitement l'un des événements A qui figurent dans la proposition 15 en termes du comportement germe des trajectoires de X à l'instant $L+$. Une formule telle que

$$A = \limsup_{n\to\infty} \{X_{L+1/n} - X_L > 0\}$$

semble plausible, mais, pour qu'elle soit vraie en toute généralité, il faudrait déjà, d'après la proposition précédente, qu'y remplacer X par un autre brownien engendrant la même filtration revienne à y remplacer A par $A\triangle B$ pour un événement $B \in \mathcal{F}_L$; or nous ignorons si cette propriété de stabilité a lieu...

Proposition 16. — *Dans une filtration* $\mathcal{F}$ *dont toutes les martingales sont continues, soit* L *un temps honnête tel que* $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] \leqslant 2$. *Il existe une martingale uniformément intégrable* M *nulle en* 0, *vérifiant les trois propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{F}_{L+} = \mathcal{F}_L \vee \sigma(\operatorname{sgn} M_\infty)$;

(ii) $\{M_\infty = 0\} = \{\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] = 1\}$;

(iii) *sur l'événement* $\{M_\infty \neq 0\}$, L *est le dernier zéro de* M.

D'après (ii), l'événement $\{M_\infty = 0\}$ est dans $\mathcal{F}_L$, et l'on peut indifféremment convenir dans le (i) que $\operatorname{sgn} 0 = 0$, ou 1, ou -1 sans que cela change la tribu $\mathcal{F}_L \vee \sigma(\operatorname{sgn} M_\infty)$ qui y figure.

Démonstration. — Par la proposition 15, il existe un événement $A \in \mathcal{F}_{L+}$ tel que $\mathcal{F}_{L+} = \mathcal{F}_L \vee \sigma(A)$. Soit

$$B = \{\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_L] > 0 \text{ et } \mathbb{P}[A^c|\mathcal{F}_L] > 0\} = \{0 < \mathbb{P}[A|\mathcal{F}_L] < 1\} \in \mathcal{F}_L \ ,$$

de sorte que $B^c = \{\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_L] = \mathbb{1}_A\}$. Sur B^c, la v. a. $\mathbb{1}_A$ est égale à $\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_L]$, qui est mesurable pour $\mathcal{F}_L$, donc $(\mathcal{F}_{L+})_{|B^c} = (\mathcal{F}_L)_{|B^c}$ et $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] = 1$ sur B^c par le (ii) de la proposition 10. Sur B, on a $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] \geqslant 2$ par le point (v) de la proposition 11, donc, sur B, $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{L+}|\mathcal{F}_L] = 2$ en utilisant l'hypothèse. Posons

$$M_\infty = \frac{\mathbb{1}_{A\cap B}}{\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_L]} - \frac{\mathbb{1}_{A^c\cap B}}{\mathbb{P}[A^c|\mathcal{F}_L]} \qquad \text{où } \frac{0}{0} = 0 \ .$$

Le lemme 6 (iii), appliqué avec $n = 2$, dit que M_∞ est la valeur finale de la martingale uniformément intégrable et nulle en zéro $M = \mathcal{O}(M_\infty)J_-$. On a

$$A\cap B = \{M_\infty > 0\} \ , \qquad A^c\cap B = \{M_\infty < 0\} \ , \qquad B^c = \{M_\infty = 0\} \ .$$

La propriété (i) résulte de la proposition 15 et de

$$\{M_\infty > 0\} = A \cap B = A \bigtriangleup (A \backslash B) = A \bigtriangleup \{\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_L] = 1\} \ .$$

La propriété (ii) vient de $\{M_\infty = 0\} = B^c$; pour vérifier (iii), il suffit de remarquer que sur $]\!]L, \infty[\![$, on a $J_- > 0$ et $\mathcal{O}(M_\infty) = M_\infty$, donc M a sur cet intervalle le même signe (-1, 0 ou 1) que M_∞. ∎

Les corollaires 3 et 4 vont étendre le théorème 3 à des filtrations un peu plus générales que les filtrations browniennes, les filtrations browniennes changées de probabilité (elles ne sont pas nécessairement browniennes : voir [8]) et les filtrations browniennes changées de temps.

Proposition 17. — *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ *un espace filtré et* $\mathbb{Q}$ *une probabilité telle que* $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. *Appelons* $\mathcal{A}'$ *et* $\mathcal{F}'$ *les tribu et filtration complétées par tous les événements négligeables pour* $\mathbb{Q}$. *On a* $\operatorname{Sp\,Mult}(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}') \leqslant \operatorname{Sp\,Mult}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. *Si* $\mathbb{Q}$ *est équivalente à* $\mathbb{P}$, *on a* $\operatorname{Sp\,Mult}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q}, \mathcal{F}) = \operatorname{Sp\,Mult}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$.

Démonstration. — Tout ensemble optionnel pour $(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}')$ est indistinguable pour $\mathbb{Q}$ d'un ensemble optionnel pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$; tout temps honnête L pour $(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}')$ est donc égal presque sûrement pour $\mathbb{Q}$ à un temps honnête ℓ pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. La tribu $\mathcal{F}'_L$ est engendrée par $\mathcal{F}_\ell$ et par les événements négligeables pour $\mathbb{Q}$; de même pour $\mathcal{F}'_{L+}$ et $\mathcal{F}_{\ell+}$. Si $\operatorname{Sp\,Mult}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}) = n < \infty$, on a $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}_{\ell+}|\mathcal{F}_\ell] \leqslant n$, la proposition 9 c) permet d'en déduire $\operatorname{Mult}[\mathcal{F}'_{L+}|\mathcal{F}'_L] \leqslant n$ (avec égalité si $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$), et l'on a donc $\operatorname{Sp\,Mult}(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}') \leqslant n$, (égalité si $\mathbb{Q} \approx \mathbb{P}$). ∎

Corollaire 3. — *Soient* $\mathcal{F}$ *une filtration brownienne sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et* $\mathbb{Q}$ *une probabilité absolument continue par rapport à* $\mathbb{P}$. *Appelons* $\mathcal{A}'$ *et* $\mathcal{F}'$ *les tribu et filtration complétées par tous les événements négligeables pour* $\mathbb{Q}$.

On a $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}') = 2$.

Démonstration. — La proposition 17 et le théorème 3 entraînent immédiatement $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}') \leqslant 2$. Il existe un mouvement brownien X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$; son transformé de Girsanov est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}')$, et la filtration $\mathcal{F}'$ n'est donc pas constante. D'où $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}') \neq 1$, et finalement $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\Omega, \mathcal{A}', \mathbb{Q}, \mathcal{F}') = 2$. ∎

Définition. — *Soit* I *un ensemble dénombrable non vide. Un processus* X *défini sur un espace filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^I$ *est une* martingale pure *si*

(i) *chaque coordonnée* X^i *de* X *est une martingale locale continue issue de l'origine ;*

(ii) *le crochet* $C = \langle X^i, X^i \rangle$ *ne dépend pas de la coordonnée* i *(on notera* τ *l'inverse continu à droite de* C *;* τ *est infini sur l'intervalle aléatoire* $[\![C_\infty, \infty[\![$*) ;*

(iii) *il existe un plongement* Ψ *de* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *dans un espace* $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ *et un mouvement brownien* ξ *sur* $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$*, indépendant de* $\Psi(\mathcal{F}_0)$*, tels que* $\Psi(C_t)$ *soit pour chaque* $t \in [0, \infty]$ *un temps d'arrêt de la filtration* $\Psi(\mathcal{F}_0) \vee \mathrm{Nat}\,\xi$*, et que* ξ *soit égal à* $\Psi(X \circ \tau)$ *sur l'intervalle stochastique* $[\![0, \Psi(C_\infty)[\![$.

Remarques. — Par rapport à la définition usuelle des martingales pures (voir par exemple [18], chapitre V, § 4), il y a ici deux changements : premièrement, X peut être multidimensionnelle, et le changement de temps qui la rend brownienne est alors le même pour tous les indices i ; deuxièmement, ce changement de temps peut dépendre de $\mathcal{F}_0$, et pas seulement de ξ lui-même. La pureté ainsi définie ne dépend donc pas uniquement de la loi de X. Par exemple, avec notre définition, si T est une v. a. uniforme sur l'intervalle $[1, 2]$ et si B est un mouvement brownien pour $\mathcal{F}$, indépendant de $\sigma(T) \vee \mathcal{F}_0$, le brownien arrêté B^T est une martingale pure si et seulement si T est mesurable pour $\mathcal{F}_0$, et n'est donc pas pure si T est dans $\mathcal{F}_1$ mais pas dans $\mathcal{F}_0$, ou si T est totalement inaccessible. La raison du rôle un peu bizarre joué par $\mathcal{F}_0$ est purement technique ; elle apparaîtra plus bas, lorsque nous parlerons de pureté dans un intervalle $[\![S, T]\!]$. Il sera alors naturel d'autoriser les changements de temps à dépendre de ce qui s'est passé avant S, et, travaillant dans la filtration décalée $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{S+t}$, nous aurons besoin pour $\mathcal{G}$ d'une notion de pureté qui tienne compte de l'information initiale.

Toute martingale pure X a une limite X_∞ sur l'événement $\{C_\infty < \infty\}$; le processus $X \circ \tau$ est un mouvement brownien arrêté au temps C_∞. Ce processus est défini sur l'espace Ω, mais, lorsque $\mathbb{P}[C_\infty < \infty] > 0$, il se peut que Ω ne soit pas assez riche pour contenir tout un brownien coïncidant avec $X \circ \tau$ sur $[\![0, C_\infty]\!]$. Le rôle de Ψ est de remplacer Ω par un espace Ω' suffisamment gros pour que $X \circ \tau$ ait la place d'y être prolongé en un brownien ξ défini sur $[\![0, \infty[\![$. Lorsque $C_\infty = \infty$ ce plongement n'est pas nécessaire, et l'on a dans ce cas une définition équivalente en prenant dans (iii) $\Omega' = \Omega$ et $\Psi = \mathrm{Id}$.

Remarquer l'orthogonalité des coordonnées d'une martingale pure : $\langle X^i, X^j \rangle = 0$ pour $i \neq j$.

Une situation plus générale est décrite et étudiée dans [12] : On n'y suppose plus (ii) mais on demande que les coordonnées X^i soient orthogonales et que les C_t soient des temps d'arrêt vectoriels de $\mathcal{F}_0 \vee \mathrm{Nat}\,(X\circ\tau)$.

DÉFINITION. — *Une filtration $\mathcal{F}$ sur un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est* pure *s'il existe dans $\mathcal{F}$ une martingale pure X telle que l'on ait $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \vee \mathrm{Nat}\, X$.*

Le petit lemme suivant est bien connu ; il intervient dans toutes les utilisations de la pureté. La présence du plongement Ψ dans l'énoncé et dans la démonstration rappelle que nous avons dû grossir l'espace pour que les browniens arrêtés, obtenus par changement de temps des martingales pures, soient de vrais browniens, définis sur $[0, \infty[$ avant d'être arrêtés ; le lecteur gêné par ces Ψ peut se munir de blanc et les effacer !

LEMME 7. — *Si $\mathcal{F}$ est pure, en conservant les notations des deux définitions précédentes et en appelant $\hat{\mathcal{F}}$ la filtration $\Psi(\mathcal{F}_0) \vee \mathrm{Nat}\,\xi$, on a $\Psi(\mathcal{F}_t) = \hat{\mathcal{F}}_{\Psi(C_t)}$. De plus, si M est dans $\mathcal{F}$ une martingale uniformément intégrable, la martingale $\mathbb{E}'[\Psi(M_\infty)|\hat{\mathcal{F}}_t]$ de $\hat{\mathcal{F}}$ est égale à $\Psi(M\circ\tau)$.*

DÉMONSTRATION. — Notant d'abord que $\Psi(X_t) = \xi_{\Psi(C_t)}$ est mesurable pour $\hat{\mathcal{F}}_{\Psi(C_t)}$, on en déduit $\Psi(\mathcal{F}_t) \subset \hat{\mathcal{F}}_{\Psi(C_t)}$. Pour établir l'inclusion inverse, observons que $\xi_{s\wedge\Psi(C_t)} = \Psi(X_{\tau_s\wedge t})$ est mesurable pour $\Psi(\mathcal{F}_t)$, donc

$$\hat{\mathcal{F}}_{\Psi(C_t)} = \Psi(\mathcal{F}_0) \vee \sigma(\xi^{\Psi(C_t)}) \subset \Psi(\mathcal{F}_t) \ .$$

Si maintenant M est une martingale uniformément intégrable pour la filtration $\mathcal{F}$, la martingale u. i. $\hat{M}_t = \mathbb{E}'[\Psi(M_\infty)|\hat{\mathcal{F}}_t]$ vérifie

$$\begin{aligned}\hat{M}_{\Psi(C_t)} &= \mathbb{E}'[\Psi(M_\infty)|\hat{\mathcal{F}}_{\Psi(C_t)}] = \mathbb{E}'[\Psi(M_\infty)|\Psi(\mathcal{F}_t)] \\ &= \Psi\big(\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t]\big) = \Psi(M_t) \ .\end{aligned}$$

Il en résulte $\hat{M}_{\Psi(C_{\tau_t})} = \Psi(M_{\tau_t})$; en remarquant que $C_{\tau_t} = t\wedge C_\infty$, on en déduit que $\Psi(M_{\tau_t}) = \hat{M}_{t\wedge\Psi(C_\infty)}$ et $\Psi(M\circ\tau)$ est une martingale u. i. pour $\hat{\mathcal{F}}$. Sa valeur à l'infini est $\Psi(M_{\tau_\infty}) = \Psi(M_\infty)$. ∎

COROLLAIRE 4. — *Toute filtration pure $\mathcal{F}$ vérifie* $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F}) \leqslant 2$.

DÉMONSTRATION. — Dans $\mathcal{F}$, soit Y une martingale-araignée multiple bornée. Avec les notations des deux définitions qui précèdent, le lemme 7 dit que $\Psi(Y\circ\tau)$ est, dans la filtration $\mathcal{G} = \Psi(\mathcal{F}_0) \vee \mathrm{Nat}\,\xi$, la martingale de valeur finale $\Psi(Y_\infty)$; c'est en particulier une martingale-araignée multiple. Comme $\mathcal{G}$ est brownienne, le théorème 2 donne $\Psi(Y_\infty) = 0$. On a donc $Y_\infty = 0$, et $Y = 0$; ainsi, la condition (i) de la proposition 14 est satisfaite pour $n = 2$, d'où $\mathrm{Sp\,Mult}\,(\mathcal{F}) \leqslant 2$. ∎

4. Application aux processus de Walsh

Il s'agit de processus introduits par J. Walsh dans l'épilogue de [22]. De nombreuses définitions de ces processus sont possibles ; le lecteur trouvera l'une d'entre elles, ainsi que beaucoup de références, dans [4] ; il pourra aussi consulter C. Rainer [17] ou E. Vernocchi [21]. La définition proposée ci-dessous est bien sûr équivalente à toutes les autres.

Puisque nous nous intéressons tout spécialement aux filtrations, nous allons définir un processus de Walsh, non pas seulement dans sa filtration naturelle, mais dans une filtration donnée a priori (comme on parle d'un mouvement brownien dans une filtration donnée) ; le point de vue le plus commode pour cela est la définition par un problème de martingales, en demandant que certaines fonctionnelles du processus soient des martingales dans la filtration considérée. Une fois la définition posée, nous en déduirons une description du processus (propositions 18 et 19) ; mais nous ne tenterons pas d'en établir l'existence, renvoyant à [4], et aux références qui s'y trouvent, le lecteur intéressé par une construction (ou seulement sceptique quant à l'existence). Bien entendu, l'existence n'est possible que si la filtration s'y prête, de même qu'il n'existe pas toujours de mouvement brownien dans une filtration donnée. Une conséquence directe du théorème 2 est précisément qu'il n'existe pas de processus de Walsh dans une filtration brownienne (corollaire 5).

Soit $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}}, \pi)$ un espace probabilisé (appelé ensemble des rayons) ; pour des raisons de commodité, on supposera que le réel 0 n'est pas élément de $\mathbf{V}$. L'espace dans lequel vivront les processus de Walsh est $\mathbf{S} = \{c\} \cup \big(\,]0,\infty[\, \times \mathbf{V}\big)$, où la réunion est disjointe ; le point c est appelé centre. L'espace $\mathbf{S}$ est muni de la tribu engendrée par $\{c\}$ et par la tribu produit sur $]0,\infty[\times\mathbf{V}$. On désignera par ρ l'application de $\mathbf{S}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\rho(c) = 0$ et $\rho\big((r,v)\big) = r$ pour $r > 0$ et $v \in \mathbf{V}$; et par θ l'application de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{V} \cup \{0\}$ donnée par $\theta(c) = 0$ et $\theta\big((r,v)\big) = v$ pour $r > 0$ et $v \in \mathbf{V}$. Il faut imaginer $\mathbf{S}$ comme une réunion de demi-droites toutes issues du même point c ; chacune d'entre elles correspond à un rayon v et est paramétrée par $r \in\,]0,\infty[$. Les fonctions ρ et θ jouent le rôle de coordonnées polaires sur $\mathbf{S}$.

Définition. — *Un processus Z, défini sur un espace filtré $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$ et à valeurs dans $\mathbf{S}$, est un processus de Walsh (plus précisément : un processus de Walsh associé à $(\mathbf{V}, \pi)$) si, en posant $R = \rho\circ Z$ et $\Theta = \theta\circ Z$,*

(i) *le processus R est, pour la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, un mouvement brownien réfléchi issu de l'origine ;*

(ii) *pour toute fonction f sur $\mathbf{V}$, mesurable, bornée et d'intégrale nulle, le processus $f(\Theta)\,R$ est une martingale de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, continue à droite et pourvue de limites à gauche.*

Le choix de $R_0 = 0$ (et donc $Z_0 = c$) fait en (i) n'est pas indispensable, mais sera commode et nous évitera dans la suite quelques conditionnements par $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$. On pourrait s'en dispenser, par exemple pour s'intéresser aux aspects markoviens de Z ; il faudrait alors remplacer « martingale » par « martingale locale » dans le (ii), pour tenir compte du cas où R_0 ne serait pas intégrable.

Les propositions 18 et 19 ci-dessous donneront quelques propriétés des processus de Walsh ; voici leur interprétation intuitive. Un processus de Walsh est markovien ; sa distance au centre c est le brownien réfléchi R. Conditionnellement à R, la partie angulaire Θ est constante dans chaque excursion de R, a pour loi π, et ses valeurs dans des excursions différentes sont indépendantes. Au début de chaque excursion de R, le processus Z se trouve au centre et choisit au hasard suivant π, sans tenir compte du passé, un rayon qui sera conservé tout au long de l'excursion ; et à la fin de l'excursion, Z revient au centre et le rayon qui avait été choisi n'a plus aucune influence sur le comportement ultérieur.

On prend souvent pour $\mathbf{V}$ le cercle unité du plan euclidien; ceci permet d'identifier $\mathbf{S}$ avec le plan au moyen des coordonnées polaires (ρ, θ) et le processus se déplace alors de façon brownienne sur des demi-droites issues de l'origine, en ne passant de l'une à l'autre que via l'origine.

D'importants exemples de processus de Walsh sont les mouvements browniens gauches (skew Brownian motions), introduits par K. Itô et H.P. McKean dans [11]; ils correspondent au cas où $\mathbf{V} = \{-1, 1\}$ et $\mathbf{S} = \mathbb{R}$. Ils ont même valeur absolue qu'un brownien usuel, et les signes des excursions sont choisis dans $\{-1, 1\}$ indépendamment et selon la loi π. Lorsque π est la loi uniforme, on retrouve bien sûr un mouvement brownien ordinaire mais si $\pi(\{1\}) < \frac{1}{2}$ (respectivement $\pi(\{1\}) > \frac{1}{2}$), on a seulement une surmartingale (respectivement une sous-martingale). J.M. Harrison et L.A. Shepp ont montré dans [10], à l'aide du théorème d'unicité trajectorielle de Nakao, que la filtration d'un mouvement brownien gauche est toujours celle d'un brownien linéaire usuel.

Rappelons qu'un brownien réfléchi R admet pour décomposition canonique $R = \beta + L$, où la partie martingale β est un mouvement brownien et où la partie à variation finie L, qui vérifie $L_t = -\inf_{s \leqslant t} \beta_s$, est aussi le demi-temps local en zéro de R, c'est-à-dire son temps local symétrique en zéro, ou encore le temps local en zéro de tout brownien ayant R pour valeur absolue. Réciproquement, tout brownien β est la partie martingale d'un unique brownien réfléchi R, donné par $R_t = \beta_t - \inf_{s \leqslant t} \beta_s$.

Proposition 18. — *Soit Z un processus de Walsh, de coordonnées polaires R et Θ, défini sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$. Appelons L le demi-temps local en 0 de R, c'est-à-dire le processus croissant nul à l'origine tel que $\beta = R - L$ soit un mouvement brownien linéaire.*

(i) *Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbf{V}$, le processus $f \circ \Theta$ reste p. s. constant lors de chaque excursion de R; il est prévisible.*

(ii) *Le processus Z est aussi un processus de Walsh pour la filtration* $\operatorname{Nat} Z$, *et, plus généralement, pour toute filtration intermédiaire entre $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et* $\operatorname{Nat} Z$.

(iii) *Si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathbf{V}$, la martingale*

$$M^f = \int \mathbb{1}_{\{Z \neq c\}} f(\Theta)\, d\beta$$

vaut $f(\Theta)R - \pi(f)L$. En particulier, si $\pi(f) = 0$, la martingale $f(\Theta)R$, qui figure dans la définition des processus de Walsh, est continue.

Remarque. — Si l'on suppose en outre que $\mathbf{V}$ est essentiellement séparable et que deux points de $\mathbf{V}$ sont toujours séparés par deux éléments non négligeables de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, le (i) dit que Θ lui-même est constant lors des excursions de R et prévisible. On peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant $\mathbf{V}$ par un quotient convenable; nous préférons ne pas le faire ici pour éviter d'alourdir la proposition 20, plus bas.

Démonstration. — (i) Soit $s > 0$; posons $D_s = \inf \{t \geqslant s : R_t = 0\}$. Pour $A \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$, la fonction $a = \mathbb{1}_A - \pi(A)$ est de moyenne nulle et $M = a(\Theta)\, R$ est donc une martingale. En raison de l'expression de a, les sauts de M ne peuvent prendre que les valeurs $\pm R$. Soient S le temps d'arrêt $\inf \{t > s : \Delta M_t \neq 0\}$ et $T = S \wedge D_s \wedge n$, où n est un entier plus grand que s. Sur l'intervalle $[\![s,T[\![$, M est continue, R est continu et strictement positif, $a{\circ}\Theta = M/R$ est continue, donc constante en raison de l'expression de a, et $M_t = a(\Theta_s)\,R_t$. Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned} M_T - M_s &= a(\Theta_s)\,(R_T - R_s) + \Delta M_T \\ &= a(\Theta_s)\,(R_T - R_s) + \mathbb{1}_{\{\Delta M_T \neq 0\}}(-1)^{\mathbb{1}_A \circ \Theta_s} R_T\ . \end{aligned}$$

Puisque T est majoré par D_s et borné, $\mathbb{E}[M_T - M_s | \boldsymbol{\mathcal{F}}_s]$ et $\mathbb{E}[R_T - R_s | \boldsymbol{\mathcal{F}}_s]$ sont nuls; la formule ci-dessus entraîne $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\Delta M_T \neq 0\}} R_T | \boldsymbol{\mathcal{F}}_s] = 0$, donc $\mathbb{1}_{\{\Delta M_T \neq 0\}} R_T = 0$ p. s. et $T = D_s$ sur $\{\Delta M_T \neq 0\}$. Mais $\Delta M_{D_s} = \pm R_{D_s} = 0$; sur $\{\Delta M_T \neq 0\}$ on devrait avoir $\Delta M_T = \Delta M_{D_s} = 0$; ainsi, $\Delta M_T = 0$ p. s., d'où $S \geqslant D_s \wedge n$, $T \geqslant D_s \wedge n$, et $a{\circ}\Theta$ est constant sur $[\![s, D_s \wedge n[\![$. En faisant varier s parmi les rationnels et n parmi les entiers, on obtient que $\mathbb{1}_A \circ \Theta$ est constant sur chaque excursion de R; l'extension des ensembles aux fonctions est immédiate.

La prévisibilité de $f{\circ}\Theta$ s'obtient en écrivant $f{\circ}\Theta = \lim_{n\to\infty} f{\circ}\Theta \mathbb{1}_{\{R \geqslant 1/n\}}$.

(ii) Si l'on remplace $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ par une filtration plus petite, mais à laquelle Z est encore adapté, les processus β et $f{\circ}\Theta\,R$ restent adaptés, donc restent des martingales (pour $\pi(f) = 0$), et Z reste un processus de Walsh.

(iii) Lorsque f est constante, la formule $\int f{\circ}\Theta\,d\beta = f{\circ}\Theta\,R - \pi(f)\,L$ découle aussitôt de $R = \beta + L$; il suffit donc de la vérifier lorsque $\pi(f) = 0$. Dans ce cas, le processus $M = f{\circ}\Theta\,R$ est une martingale, et même une martingale continue : elle est continue dans les excursions de R car $f{\circ}\Theta$ y est constant, et elle est continue en tout zéro de R car $|M| \leqslant (\sup|f|)\,|R|$. On a donc, par le lemme 3, $M = \int \mathbb{1}_{\{M\neq 0\}} dM$. Mais l'ouvert prévisible $\{M \neq 0\}$ est inclus dans la réunion des ouverts $]\!]t, D_t[\![$, où t décrit les rationnels et où $D_t = \inf\{u \geqslant t : R_u = 0\}$. Sur un tel ouvert, on peut écrire $dM = f(\Theta_t)\,dR = f(\Theta_t)\,d\beta = f{\circ}\Theta\,d\beta$. Ainsi, $\mathbb{1}_{\{M\neq 0\}} dM = \mathbb{1}_{\{M\neq 0\}} f{\circ}\Theta\,d\beta = f{\circ}\Theta\,\mathbb{1}_{\{R\neq 0\}}\,d\beta$ et $M = \int f{\circ}\Theta\,d\beta$. ∎

Les quelques propriétés des processus de Walsh décrites dans la proposition 18 sont celles dont nous aurons besoin dans la suite, mais elles ne permettent guère de se représenter ces processus. La proposition 19 ci-dessous déduit la loi d'un processus de Walsh de la définition donnée plus haut, et établit donc l'équivalence entre cette définition et celles données par d'autres auteurs. Compte tenu du sujet qui nous occupe, il nous semble intéressant de décrire le comportement de la filtration aux instants ou le processus de Walsh quitte le centre c; ceci nécessitera le lemme 8 ci-dessous. Ce lemme propose des variations sur un thème bien connu (voir par exemple l'exercice V-(4.16) de [18]). Si nous le rappelons ici, c'est parce que le b) et sa conséquence (c.iii), bien que très faciles, ne sont pas classiques, et surtout parce que le point (c.iv) nous servira dans la proposition 19 pour construire le semi-groupe de transition d'un processus de Walsh (sans recourir à la théorie des excursions).

La condition (c.i) du lemme est l'*hypothèse H* de la littérature; il est bien connu, et élémentaire, que dans (c.i) on peut remplacer « martingale bornée » par « martingale » ou par « martingale locale ».

LEMME 8. — *L'espace probabilisé* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ *est fixé. Nous appelons* $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ *l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ *et* $\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}$ *l'opérateur de projection optionnelle associé à une filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *;* $\mathrm{Opt_b}(\boldsymbol{\mathcal{F}})$ *désignera l'espace de tous les processus bornés et optionnels pour* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

a) *Soient* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *trois sous-tribus de* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *telles que* $\boldsymbol{\mathcal{B}} \subset \boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \boldsymbol{\mathcal{D}}$. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes (et traduisent toutes l'indépendance conditionnelle de* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *par* *rapport à $\boldsymbol{\mathcal{B}}$) :*

(a.i) $$\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\ ;$$

(a.ii) $$\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{C}}} = \mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\ ;$$

(a.iii) $$\forall C \in \mathrm{L}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{C}}) \quad \forall D \in \mathrm{L}^\infty(\boldsymbol{\mathcal{D}}) \quad \mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(CD) = \mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(C)\,\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(D)\ .$$

Quand ces conditions sont satisfaites, $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{C}} \cap \boldsymbol{\mathcal{D}}$.

b) *Soient $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ trois filtrations sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P})$ telles que $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subset \boldsymbol{\mathcal{G}} \cap \boldsymbol{\mathcal{H}}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(b.i) $$\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{G}}}\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\ ;$$

(b.ii) $$\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{H}}}\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{G}}} = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\ ;$$

(b.iii) $$\forall G \in \mathrm{Opt_b}(\boldsymbol{\mathcal{G}}) \quad \forall H \in \mathrm{Opt_b}(\boldsymbol{\mathcal{H}}) \quad \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(GH) = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)\,\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(H)\ .$$

Quand ces conditions sont satisfaites, $\boldsymbol{\mathcal{F}} = \boldsymbol{\mathcal{G}} \cap \boldsymbol{\mathcal{H}}$.

c) *Soient $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ deux filtrations telles que $\boldsymbol{\mathcal{F}} \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}$. Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :*

(c.i) *toute martingale bornée de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est aussi une martingale bornée de $\boldsymbol{\mathcal{G}}$;*

(c.ii) *pour tout $t \geqslant 0$ les tribus $\boldsymbol{\mathcal{G}}_t$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{F}}_t$;*

(c.iii) *pour toute variable aléatoire τ mesurable pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\infty$ et à valeurs dans $[0, \infty]$, les tribus $\boldsymbol{\mathcal{G}}_\tau$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\tau$;*

(c.iv) *pour tout temps L honnête pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (donc aussi pour $\boldsymbol{\mathcal{G}}$), les tribus $\boldsymbol{\mathcal{G}}_{L+}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{L+}$;*

(c.v) *en appelant $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ la filtration constante telle que $\boldsymbol{\mathcal{H}}_t = \boldsymbol{\mathcal{F}}_\infty$ pour tout t, les conditions* (b.i), (b.ii) *et* (b.iii) *sont satisfaites.*

Démonstration du lemme 8. — Exercice tout à fait classique, le a) rappelle trois définitions équivalentes de l'indépendance conditionnelle; il serait d'autant plus superflu de le redémontrer ici qu'il se déduit facilement du b).

b) Nous commençons par (b.i) $\Rightarrow$ (b.iii). Soient $G \in \mathrm{Opt_b}(\boldsymbol{\mathcal{G}})$ et $H \in \mathrm{Opt_b}(\boldsymbol{\mathcal{H}})$; on a $\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(H) = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{G}}}\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(H) = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(H)$. Si F est un processus croissant, borné et optionnel pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, le processus $\int G\,dF$ est optionnel pour $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ et de variation totale finie, et l'on a donc l'égalité $\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty HG\,dF\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{G}}}(H)\,G\,dF\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(H)\,G\,dF\Big]$. Ceci ayant lieu pour tout F, il en résulte $\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(GH) = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\big(G\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(H)\big) = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)\,\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(H)$, c'est-à-dire (b.iii).

(b.iii) $\Rightarrow$ (b.ii). Soient T un temps d'arrêt pour $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ et G un processus borné, adapté à $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ et continu à droite. Le processus $H = \mathbb{1}_{\{T>s\}}\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$ est optionnel pour $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ et l'hypothèse (b.iii) donne, pour $s < t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[G_t\mathbb{1}_{\{s<T\leqslant t\}}\big] &= \mathbb{E}\big[G_tH_t\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(GH)_t\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)_t\,\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(H)_t\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}\Big(\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)H\Big)_t\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)_tH_t\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)_t\mathbb{1}_{\{s<T\leqslant t\}}\Big]\ .\end{aligned}$$

En écrivant ceci pour les instants $s = (k{-}1)2^{-n}$ et $t = k2^{-n}$, en sommant sur $k \geqslant 0$ et en appelant T_n le plus petit dyadique d'ordre n supérieur ou égal à T, on a $\mathbb{E}\big[G_{T_n}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)_{T_n}\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\Big]$. Puisque G est continu à droite, $\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)$ l'est également (voir le théorème VI-47 de Dellacherie-Meyer [6]), et l'on a à la limite $\mathbb{E}\big[G_T\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G)_T\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}\Big]$. Comme T est un temps d'arrêt arbitraire de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, on en déduit $\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}}(G) = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{H}}}(G)$. Par classes monotones, ceci s'étend à tout $G \in \mathrm{Opt_b}(\boldsymbol{\mathcal{G}})$, d'où $\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{F}}} = \mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{H}}}\mathbb{O}^{\boldsymbol{\mathcal{G}}}$.

Nous venons de voir (b.i) $\Rightarrow$ (b.iii) $\Rightarrow$ (b.ii); on en tire (b.i) $\Rightarrow$ (b.ii), et (b.ii) $\Rightarrow$ (b.i) s'en déduit en échangeant les rôles de $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

Supposons satisfaites les trois conditions (b). Pour $A \in \boldsymbol{\mathcal{G}}_t \cap \boldsymbol{\mathcal{H}}_t$, la v. a. $T = t + \mathbb{1}_A$ est un temps d'arrêt pour $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ et pour $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, le processus $\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$ est optionnel pour ces deux filtrations, donc aussi, par (b.i), pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, et T est un temps d'arrêt pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}$. En conséquence, $A \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_t$; et l'on a $\boldsymbol{\mathcal{F}}_t = \boldsymbol{\mathcal{G}}_t \cap \boldsymbol{\mathcal{H}}_t$.

c) Tout d'abord (c.iv) $\Rightarrow$ (c.ii) est trivial, car tout temps fixe t est honnête, et vérifie $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

(c.ii) $\Rightarrow$ (c.i) est classique et facile : Si M est une martingale bornée pour $\mathcal{F}$, il existe $U \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}_\infty)$ tel que $M_t = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t]$; en utilisant l'indépendance conditionnelle sous la forme (a.i), on a $M_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_t}(U) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(U) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_t}(U)$ et M est aussi une martingale pour $\mathcal{G}$.

(c.i) $\Rightarrow$ (c.v). Supposons que toute martingale bornée pour $\mathcal{F}$ est une martingale pour $\mathcal{G}$; appelons $\mathcal{H}$ la filtration constante telle que $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_\infty$. Soit $U \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}_\infty)$; le processus $M_t = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t]$ est une martingale continue à droite pour $\mathcal{F}$ et donc aussi pour $\mathcal{G}$, d'où $M_t = \mathbb{E}[U|\mathcal{G}_t]$; si f est une fonction borélienne bornée, le processus $X_t(\omega) = f(t)U(\omega)$ vérifie $\mathbb{O}^{\mathcal{F}}(X) = fM = \mathbb{O}^{\mathcal{G}}(X)$. Par classes monotones, on en tire $\mathbb{O}^{\mathcal{F}}(X) = \mathbb{O}^{\mathcal{G}}(X)$ pour tout processus X borné et mesurable pour la tribu-produit $\mathrm{Borel}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}_\infty$. La condition (b.i) est ainsi satisfaite, (b.ii) et (b.iii) en découlent.

(c.v) $\Rightarrow$ (c.iii). Si τ est une v. a. mesurable pour $\mathcal{F}_\infty$ et à valeurs dans $[0,\infty]$, c'est un temps d'arrêt de $\mathcal{H}$ et l'on a bien sûr $\mathcal{H}_\tau = \mathcal{F}_\infty$. Tout $U \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{G}_\tau)$ est de la forme $G_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} + V\mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}}$ où $G \in \mathrm{Opt_b}(\mathcal{G})$ et $V \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{G}_\infty)$. On peut donc écrire, en appliquant (b.ii) au processus G,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(U) &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}\left[G_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}\left[V\,\mathbb{1}_{\tau=\infty}\right] = \mathbb{E}^{\mathcal{H}_\tau}\left[G_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}\left[V\,\mathbb{1}_{\tau=\infty}\right] \\ &= \left(\mathbb{O}^{\mathcal{H}}(G)\right)_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(V)\,\mathbb{1}_{\tau=\infty} = \left(\mathbb{O}^{\mathcal{F}}(G)\right)_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} + \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(V)\,\mathbb{1}_{\tau=\infty}\ .\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(U)$ est mesurable pour $\mathcal{F}_\tau$, d'où $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(U) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}(U)$, c'est-à-dire $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}\mathbb{E}^{\mathcal{G}_\tau} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}\mathbb{E}^{\mathcal{G}_\tau} = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau}$. Ainsi, la condition (a.ii) est satisfaite par les trois tribus $\mathcal{F}_\tau$, $\mathcal{G}_\tau$ et $\mathcal{F}_\infty$.

(c.iii) $\Rightarrow$ (c.iv). Ceci résulte aussitôt de la proposition 13 b), en prenant $\tau = L + \frac{1}{n}$ dans la relation $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\tau} = \mathbb{E}^{\mathcal{G}_\tau}\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}$ et en faisant tendre n vers l'infini. ∎

Proposition 19. — *Soit Z un processus de Walsh défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$, associé à $(\mathbf{V}, \mathcal{V}, \pi)$. Appelons R et Θ ses coordonnées polaires, et β la partie martingale de R.*

(i) *Le processus Z est markovien par rapport à $\mathcal{F}$. Pour $0 \leqslant s < t$, si f et g sont des fonctions mesurables bornées (ou toutes deux positives) sur $\mathbf{V}\cup\{0\}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement, en posant $D_s = \inf\{t \geqslant s : R_t = 0\}$ et*[1]

$$\begin{aligned}\gamma_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}\ ,\\ a(x,g) &= \int_0^\infty g(x)\left[\gamma_{t-s}(x-R_s) - \gamma_{t-s}(x+R_s)\right] dx\ ,\\ b(x,g) &= \int_0^\infty g(x)\, 2\,\gamma_{t-s}(x+R_s)\, dx\ ,\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\Theta_t)g(R_t)|\mathcal{F}_s] &= f(\Theta_s)\,\mathbb{E}[g(R_t)\mathbb{1}_{\{D_s\geqslant t\}}|\mathcal{F}_s] + \pi(f)\,\mathbb{E}[g(R_t)\mathbb{1}_{\{D_s<t\}}|\mathcal{F}_s]\\ &= f(\Theta_s)\,a(R_s,g) + \pi(f)\,b(R_s,g)\ .\end{aligned}$$

(ii) *Le mouvement brownien β possède la propriété de représentation prévisible dans la filtration* $\mathrm{Nat}\,Z$. *En particulier, toutes les martingales de* $\mathrm{Nat}\,Z$ *sont continues.*

(iii) *Pour $t > 0$, posons $G_t = \sup\{s \leqslant t : Z_s = c\} = \sup\{s \leqslant t : R_s = 0\}$. La variable aléatoire Θ_T est indépendante de $\mathcal{F}_{G_t}$ et a pour loi π.*

Démonstration. — (i) Comme R est un mouvement brownien réfléchi pour $\mathcal{F}$, Les formules $\mathbb{E}[g(R_t)\mathbb{1}_{\{D_s\geqslant t\}}|\mathcal{F}_s] = a(R_s,g)$ et $\mathbb{E}[g(R_t)\mathbb{1}_{\{D_s<t\}}|\mathcal{F}_s] = b(R_s,g)$ résultent du principe de réflexion. Prenons f et g bornées. Pour établir la formule de semi-groupe

$$(*)\qquad \mathbb{E}[f(\Theta_t)g(R_t)|\mathcal{F}_s] = f(\Theta_s)\,\mathbb{E}[g(R_t)\mathbb{1}_{\{D_s\geqslant t\}}|\mathcal{F}_s] + \pi(f)\,\mathbb{E}[g(R_t)\mathbb{1}_{\{D_s<t\}}|\mathcal{F}_s]\ ,$$

1. Dans la formule donnant γ_t, le symbole π ne désigne pas la probabilité sur $\mathbf{V}$!

nous allons procéder en plusieurs étapes. Posons $G = \sup\big([0,t]\cap\{R=0\}\big)$ et appelons $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ la filtration naturelle de R ; c'est aussi la filtration naturelle de β.

1) En décomposant R en un pont sur $[0,G]$ et un méandre sur $[G,t]$, et en utilisant le lemme de Lindvall-Rogers, on vérifie que $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{G+} = \boldsymbol{\mathcal{R}}_G$ (voir les détails dans l'appendice de [4]).

2) Toute martingale de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ est une intégrale stochastique par rapport à β, lui-même mouvement brownien de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$; les martingales de $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ sont donc des martingales de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, et, par le (c.iv) du lemme 8, les tribus $\mathcal{F}_{G+}$ et $\boldsymbol{\mathcal{R}}_\infty$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{R}}_{G+}$, c'est-à-dire par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{R}}_G$ (étape précédente). Ainsi, pour $V \in \mathrm{L}^1(\boldsymbol{\mathcal{R}}_\infty)$, on a $\mathbb{E}[V|\mathcal{F}_{G+}] = \mathbb{E}[V|\boldsymbol{\mathcal{R}}_G]$; puisque $\boldsymbol{\mathcal{R}}_G \subset \mathcal{F}_G \subset \mathcal{F}_{G+}$, cela entraîne $\mathbb{E}[V|\mathcal{F}_{G+}] = \mathbb{E}[V|\mathcal{F}_G]$. Pour $U \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{F}_{G+})$ et $V \in \mathrm{L}^1(\boldsymbol{\mathcal{R}}_\infty)$, on a donc

$$\mathbb{E}[UV|\mathcal{F}_G] = \mathbb{E}\big[U\mathbb{E}[V|\mathcal{F}_{G+}]\,\big|\,\mathcal{F}_G\big] = \mathbb{E}\big[U\mathbb{E}[V|\mathcal{F}_G]\,\big|\,\mathcal{F}_G\big] = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_G]\;\mathbb{E}[V|\mathcal{F}_G]\ .$$

3) Si maintenant f est une fonction mesurable et bornée sur $\mathbf{V}$, de moyenne $\pi(f)$ nulle, le processus $M = f\circ\Theta\, R$, égal à $\int f\circ\Theta\, d\beta$ par la proposition 18, est une martingale continue. Cette martingale vérifie $M_G = 0$, donc aussi $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_G] = 0$ (voir [2], [3] ou [25]). Par l'étape précédente, ceci s'écrit $\mathbb{E}[f(\Theta_t)|\mathcal{F}_G]\mathbb{E}[R_t|\mathcal{F}_G] = 0$. Mais $\mathbb{E}[R_t|\mathcal{F}_G] = c\sqrt{t-G_t} > 0$ p. s. ; il reste $\mathbb{E}[f(\Theta_t)|\mathcal{F}_G] = 0$. En utilisant à nouveau l'étape précédente, on obtient $\mathbb{E}[f(\Theta_t)\,V|\mathcal{F}_G] = 0$ pour tout $V \in \mathrm{L}^1(\boldsymbol{\mathcal{R}}_\infty)$.

4) Toujours pour $\pi(f) = 0$, si g est bornée on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\Theta_t)\,g(R_t)\mathbb{1}_{\{G>s\}}|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{G>s\}}\mathbb{E}[f(\Theta_t)\,g(R_t)|\boldsymbol{\mathcal{F}}_{G\vee s}]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{G>s\}}\mathbb{E}[f(\Theta_t)\,g(R_t)|\mathcal{F}_G]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big]\ ;\end{aligned}$$

ceci est nul par l'étape précédente, et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\Theta_t)\,g(R_t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[f(\Theta_t)\,g(R_t)\mathbb{1}_{\{G\leqslant s\}}|\mathcal{F}_s]\\ &= \mathbb{E}[f(\Theta_s)\,g(R_t)\mathbb{1}_{\{G\leqslant s\}}|\mathcal{F}_s] = f(\Theta_s)\,\mathbb{E}[\,g(R_t)\mathbb{1}_{\{G\leqslant s\}}|\mathcal{F}_s]\ .\end{aligned}$$

Ceci établit $(*)$ lorsque $\pi(f) = 0$; le cas où f est constante est trivial, le cas général s'en déduit par addition.

Le caractère markovien de Z dans la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (et a fortiori dans sa filtration naturelle) se déduit immédiatement de cette formule de semi-groupe par un argument de classes monotones.

(ii) Pour établir la propriété de représentation prévisible, appelons $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$ la filtration Nat Z et désignons par $\boldsymbol{\mathcal{C}}(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \beta)$ l'ensemble de toutes les probabilités $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty)$ telles que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et que β est une martingale pour $\mathbb{Q}$. Pour une telle $\mathbb{Q}$, le processus $R_t = \beta_t - \inf_{s\leqslant t}\beta_s$ est un brownien réfléchi sur $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty, \mathbb{Q}, \boldsymbol{\mathcal{Z}})$; pour f telle que $\pi(f) = 0$, le processus $f\circ\Theta\, R$, qui est aussi égal à $\int f\circ\Theta\, d\beta$, est une martingale pour $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty, \mathbb{Q}, \boldsymbol{\mathcal{Z}})$. Sur cet espace filtré, Z est donc un processus de Walsh et sa loi est donnée par la formule de semi-groupe ci-dessus. Ceci entraîne que $\mathbb{Q}$ est la restriction de $\mathbb{P}$ à $\boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty$. Ainsi, $\boldsymbol{\mathcal{C}}(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \beta)$ contient un seul élément, $\mathbb{P}_{|\boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty}$, qui est évidemment un point extrémal de $\boldsymbol{\mathcal{C}}(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{Z}}_\infty, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{Z}}, \beta)$; ceci montre que β possède la propriété de représentation prévisible dans $\boldsymbol{\mathcal{Z}}$.

(iii) Fixons $t > 0$. Soit f bornée telle que $\pi(f) = 0$. En prenant $g = 1$ dans le (i), on voit que la martingale continue et bornée $M_s = \mathbb{E}[f(\Theta_t)|\mathcal{F}_s]$ est nulle à l'instant G_t. La proposition 13 c) donne donc $\mathbb{E}[f(\Theta_t)|\mathcal{F}_{G_t}] = \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_{G_t}] = 0$, d'où le résultat. ∎

Proposition 20. — *Soient $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}})$ et $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}')$ deux espaces mesurables et ϕ une application mesurable de $\mathbf{V}$ vers $\mathbf{V}'$. Définissons une application mesurable $\tilde\phi$ de $\mathbf{S}$ vers $\mathbf{S}'$ par $\tilde\phi(c) = c'$ et $\tilde\phi\big((r,v)\big) = \big(r,\phi(v)\big)$, et appelons π' la mesure image $\pi\circ\phi^{-1}$ de π par ϕ. Si Z est, dans une filtration, un processus de Walsh associé à $(\mathbf{V}, \pi)$, $\tilde\phi\circ Z$ est, dans cette filtration, un processus de Walsh associé à $(\mathbf{V}', \pi')$.*

Démonstration. — Cela résulte facilement de la définition des processus de Walsh : si f' est une fonction bornée sur $\mathbf{V}'$ telle que $\pi'(f') = 0$, la fonction $f = f'\circ\phi$ vérifie $\pi(f) = 0$ par définition de π', et $f'(\Theta')R' = f'\big(\phi\circ\Theta\big)R = f(\Theta)R$ est donc une martingale càdlàg. ∎

Mouvements walshiens. — Il existe une variante des processus de Walsh, légèrement différente ; pour la distinguer de la précédente, on pourrait l'appeler *mouvement walshien.* On prend pour $\mathbf{V}$ un espace vectoriel, que nous supposerons de dimension finie pour éviter des détails techniques sans intérêt ici. Si $Z = (R, \Theta)$ est un processus de Walsh associé à $(\mathbf{V}, \pi)$ au sens précédent, le mouvement walshien associé à $(\mathbf{V}, \pi)$ est le processus à valeurs dans $\mathbf{V}$ lui-même (et non pas dans $\mathbf{S}$), égal à $R\Theta$ quand $R \neq 0$ et au vecteur nul $\vec{0} \in \mathbf{V}$ quand $R = 0$ $(= \Theta)$. Attention ! Le processus Θ, à valeurs dans $\mathbf{V}$, est bien un vecteur, et non pas une variable angulaire. Les mouvements walshiens sont des processus continus dans $\mathbf{V}$.

Si X est un mouvement brownien gauche mais pas un mouvement brownien, $|X|$ est un exemple de mouvement walshien qui n'est pas un processus de Walsh

Quand π est portée par une sphère de $\mathbf{V}$ (c'est le cas considéré par J. Walsh, ainsi que dans [4]), les deux notions de mouvement walshien et de processus de Walsh sont équivalentes. Mais quand $\pi \times \pi$ charge l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ tels que les vecteurs x et y sont colinéaires et de même sens, comme dans le cas de $|X|$ ci-dessus, cela fait une grosse différence : les processus walshiens ne sont en général pas markoviens car la seule position du processus détermine la demi-droite sur laquelle il se trouve mais non le coefficient de diffusion (variation quadratique) valable pour toute l'excursion en cours. Par contre, pour les questions de filtration qui nous intéresseront plus bas, la distinction ne s'impose plus puisque les filtrations sont les mêmes (du moins si $\pi(\{\vec{0}\}) = 0$) ; en effet, la position et la variation quadratique instantanées d'un mouvement walshien $R\Theta$ déterminent alors sans équivoque le processus de Walsh (R, Θ) dont il est issu.

Proposition 21. — *Dans un espace vectoriel $\mathbf{V}$ de dimension finie, soit W un mouvement walshien associé à une probabilité π.*

Pour que W soit une semimartingale, il faut et il suffit que les moments d'ordre 1 de π existent. En ce cas, l'intégrale stochastique $\int \Theta\, d\beta$ existe et est une martingale, et W a pour décomposition canonique $\int \Theta\, d\beta + b(\pi) L$, où $b(\pi) = \int_{\mathbf{V}} x\, \pi(dx)$ est le barycentre de π.

En particulier, W est une martingale locale si et seulement si π est centrée ; et W est alors une martingale.

Démonstration. — Supposant que π a des moments d'ordre 1, nous allons d'abord montrer que $W - b(\pi)L$ est une martingale.

Pour $0 \leqslant s \leqslant t$ et pour ϕ mesurable bornée sur $\mathbf{V}$, puisque $\phi(\Theta)R - \pi(\phi)L$ est une martingale, on peut écrire $\mathbb{E}[\phi(\Theta_t)R_t | \mathcal{F}_s] = \phi(\Theta_s)R_s + \pi(\phi)\mathbb{E}[L_t - L_s | \mathcal{F}_s]$; cette formule s'étend par limites croissantes à toute fonction ϕ mesurable positive. Prenant d'abord pour ϕ une norme sur $\mathbf{V}$, on en déduit $\mathbb{E}[\|W_t\|] = \int \|x\|\, \pi(dx)\, \mathbb{E}[L_t] < \infty$ et W_t est donc intégrable. Étendant ensuite la formule aux fonctions ϕ mesurables bornées à valeurs dans $\mathbf{V}$, et prenant $\phi_n(x) = \mathbb{1}_{\{\|x\| \leqslant n\}}\, x$, on écrit

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\|\Theta_t\| \leqslant n\}} W_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{1}_{\{\|\Theta_s\| \leqslant n\}} W_s + \mathbb{E}[L_t - L_s | \mathcal{F}_s]\, \pi(\phi_n);$$

lorsque n tend vers $+\infty$, $\pi(\phi_n)$ tend vers $b(\pi)$ et, W_t étant intégrable, on obtient $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s + \mathbb{E}[L_t - L_s | \mathcal{F}_s]\, b(\pi)$; ainsi, $W - b(\pi)L$ est une martingale.

Il reste à établir deux points : que cette martingale s'écrit $\int \Theta\, d\beta$, et que réciproquement, si W est une semimartingale, la probabilité π a un barycentre.

Supposons donc que W est une semimartingale ; notons $W = M + A$ sa décomposition canonique. Appelons $[\![S_k, T_k]\!]$ les intervalles de montées de 0 à ε du processus R, de sorte que $S_0 = 0$, $R_{S_0} = 0$, $R_{T_0} = \varepsilon$, $R_{S_1} = 0$, etc. Sur $[\![T_k, S_{k+1}[\![$ on a identiquement $\Theta = \Theta_{T_k}$ et $W - W_{T_k} = \Theta(\beta - \beta_{T_k})$; donc, sur cet intervalle, $dM = \Theta\, d\beta$ et $dA = 0$. Ces deux égalités sont vraies sur l'ensemble $\{R > \varepsilon\}$, qui est inclus dans la réunion des $[\![T_k, S_{k+1}[\![$, et, à la limite en ε, on a $dM = \Theta\, d\beta$ et $dA = 0$ sur $\{R > 0\}$. Comme $\{R = 0\}$ est négligeable pour $d\beta$, donc aussi (représentation prévisible) pour dM, on en déduit que Θ est intégrable par rapport à β (au sens où le processus croissant $\int \|\Theta\|^2 dt$ est fini) et que $M = \int \Theta\, d\beta$. Le premier point est donc établi.

On en déduit aussi $A = \int \mathbb{1}_{\{R=0\}}\, dW$. Puisque l'ensemble prévisible $\bigcup_k [\![S_k, T_k]\!]$ tend vers $\{R = 0\}$ quand ε tend vers 0, A_t est la limite en probabilité

$$A_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k \geqslant 0} (W_{T_k \wedge t} - W_{S_k \wedge t}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k \geqslant 0} W_{T_k \wedge t}\, \mathbb{1}_{\{S_k \leqslant t\}} \,.$$

Pour terminer la démonstration, c'est-à-dire établir l'existence de $b(\pi)$, il suffit de montrer que $\int \|x\|\,\pi(dx)$ est finie, autrement dit que la mesure image de π par l'application norme a elle-même un barycentre. En travaillant avec $\|W\|$, qui est aussi un mouvement walshien (proposition 20) et une semimartingale, *on est ainsi ramené au cas où* $\mathbf{V} = \mathbb{R}$ *et* $\Theta \geqslant 0$. Pour $a > 0$, la probabilité π^a image de π par $x \mapsto x\mathbb{1}_{[0,a]}(x)$ est portée par $[0,a]$, donc, d'après la première partie de la démonstration, le mouvement walshien $W^a = W\mathbb{1}_{\{\Theta\leqslant a\}}$ est une semimartingale de partie à variation finie $A^a = b(\pi^a)L$. Mais on a aussi, par la formule ci-dessus,

$$A^a_t = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k\geqslant 0} W^a_{T_k\wedge t}\ \mathbb{1}_{\{S_k\leqslant t\}}\ .$$

Puisque $W \geqslant W^a$, on en tire $A \geqslant A^a = b(\pi^a)L$, d'où la majoration presque sûre $b(\pi^a) \leqslant A_\tau$, où τ est l'instant tel que $L_\tau = 1$. En faisant tendre a vers l'infini, on obtient $b(\pi) \leqslant A_\tau$, donc $b(\pi) < \infty$. ∎

Lorsque $\mathbf{V}$ est un ensemble fini et π la loi uniforme, les processus de Walsh asssociés à $(\mathbf{V},\pi)$ s'identifient à des martingales-araignées. Ceci se généralise à un espace $(\mathbf{V},\pi)$ quelconque, à condition de regrouper des rayons pour n'en garder qu'un nombre fini, et de compenser la non-uniformité de la loi par des homothéties sur chaque rayon :

Proposition 22. — *Soient $n \geqslant 2$ un entier et Q une partition finie de* $\mathbf{V}$ *en n parties mesurables, non négligeables. Si Z est un processus de Walsh associé à* $(\mathbf{V},\pi)$ *dans une filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, les n processus positifs définis pour $q \in Q$ par*

$$Y^q = \frac{1}{\pi(q)}\ \mathbb{1}_{\{\Theta\in q\}}\, R$$

sont les composantes d'une martingale-araignée pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}$.

Démonstration. — Dans un espace de dimension $n-1$, soit $\mathbf{T}$ une toile à n fils. Les Y^q sont les n composantes d'un processus à valeurs dans $\mathbf{T}$ car pour tout (t,ω), un au plus des nombres $Y^q_t(\omega)$ n'est pas nul. La fonction f définie sur $\mathbf{V}$ par $f(v) = \mathbb{1}_{\{v\in q_1\}}/\pi(q_1) - \mathbb{1}_{\{v\in q_2\}}/\pi(q_2)$ vérifie $\pi(f) = 0$; le processus $Y^{q_1} - Y^{q_2} = f\circ\Theta\, R$ est une martingale de la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, et, par la proposition 5, Y est une martingale-araignée. ∎

Définition. — *Un processus de Walsh associé à un espace probabilisé* $(\mathbf{V},\boldsymbol{\mathcal{V}},\pi)$ *sera dit* multiple *s'il existe une partition mesurable de* $\mathbf{V}$ *en trois parties non négligeables.*

Les processus de Walsh qui ne sont pas multiples sont les mouvements browniens réfléchis, obtenus quand $\mathbf{V}$ est grossier, et les mouvements browniens gauches (skew Brownian motions) qui correspondent au cas où $\mathbf{V}$ est formé de deux atomes, et qui contiennent comme cas particulier les mouvements browniens linéaires. La filtration naturelle d'un processus de Walsh non multiple est toujours brownienne.

Corollaire 5. — *Dans une filtration brownienne, il n'existe aucun processus de Walsh multiple.*

Démonstration. — S'il existait un processus de Walsh multiple Z dans une filtration brownienne, la martingale-araignée multiple Y issue de $\vec{0}$ que la proposition 22 associe à Z serait identiquement nulle par le théorème 2 ; en ce cas le brownien réfléchi $R = \sum_{q\in Q} \pi(q)\, Y^q$ devrait aussi être nul, ce qui est absurde. ∎

Une variation de cette méthode va permettre l'étude des filtrations naturelles des processus de Walsh. Il faut pour cela localiser la notion de filtration brownienne à un ensemble aléatoire ; ceci nécessite de travailler dans des filtrations browniennes arrêtées. Il n'est techniquement pas plus difficile d'utiliser des changements de temps plus généraux que le simple arrêt, ce qui amène à se placer dans des filtrations engendrées par des martingales pures ; mais nous devrons généraliser la notion de filtration pure, introduite plus haut, avant le corollaire 4.

NOTATIONS. Si T est un temps d'arrêt d'une filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, nous noterons $\boldsymbol{\mathcal{F}}^T$ la filtration arrêtée, définie par $\boldsymbol{\mathcal{F}}_t^T = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{T\wedge t}$; nous noterons $\vartheta_T\boldsymbol{\mathcal{F}}$ la filtration décalée, définie par $(\vartheta_T\boldsymbol{\mathcal{F}})_t = \boldsymbol{\mathcal{F}}_{T+t}$.

DÉFINITIONS. — *Étant donné un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$*, soient* S *et* T *deux temps d'arrêt tels que* $S \leqslant T$*, et* $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ *un ensemble aléatoire.*

a) *On dira que la filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *est* pure entre S et T *s'il existe dans la filtration décalée* $\vartheta_S\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *une martingale pure* X *telle que, en appelant* $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ *la sous-filtration de* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *définie par*

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^S = \boldsymbol{\mathcal{F}}^S \qquad \textit{et} \qquad \vartheta_S\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_S \vee \operatorname{Nat} X \ ,$$

T *soit un temps d'arrêt de* $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ *et vérifie* $\boldsymbol{\mathcal{F}}^T = \boldsymbol{\mathcal{G}}^T$.

b) *On dira que* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *est* pure dans A *s'il existe deux suites* $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de temps d'arrêt telles que* $S_k \leqslant T_k$*, que les intervalles* $[\![S_k, T_k]\!]$ *recouvrent* A *et que, pour chaque* k*,* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *soit pure entre* S_k *et* T_k.

Dans l'utilisation que nous ferons de cette notion, l'ensemble A sera un ouvert prévisible ; il n'y aurait donc aucun inconvénient à remplacer les intervalles fermés $[\![S_k, T_k]\!]$ par des intervalles ouverts $]\!]S_k, T_k[\![$. Nous n'avons pas cherché à rendre la définition raisonnable pour des ensembles A plus généraux que les ouverts prévisibles (par exemple, avec cette définition, toute filtration est pure dans n'importe quel ensemble optionnel à coupes dénombrables, ce qui est certainement déraisonnable!).

PROPOSITION 23. — *La filtration naturelle d'un processus de Walsh* Z *est pure dans l'ouvert aléatoire* $\{Z \neq c\}$.

DÉMONSTRATION. — Appelons $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ la filtration, R le brownien réfléchi $\rho\circ Z$, et β la partie martingale de R. Pour $t > 0$, soit D_t le début de $\{R = 0\} \cap [\![t, \infty[\![$. Lorsque t décrit les rationnels, les intervalles $[\![t, D_t]\!]$ recouvrent l'ouvert $\{Z \neq c\} = \{R > 0\}$; il suffit donc de vérifier que $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est pure entre t et D_t. Si l'on prend pour X le mouvement brownien réel $X_s = \beta_{t+s} - \beta_t$, la filtration $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ figurant dans la définition a) ci-dessus n'est autre que la filtration naturelle du couple (Z^t, β), où Z^t désigne l'arrêté de Z à t. Elle contient le brownien réfléchi R (déjà adapté à $\operatorname{Nat}\beta$) et donc le temps d'arrêt D_t, premier zéro de R après t.

Il reste à voir que $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{D_t} \subset \boldsymbol{\mathcal{G}}^{D_t}$. Comme toutes les martingales de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ sont continues, D_t est annoncé par des temps d'arrêt antérieurs, donc $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{D_t}$ est engendrée par Z^{D_t}. Or ce dernier vérifie $\rho\circ Z^{D_t} = R^{D_t}$ et $\theta\circ Z^{D_t} = \theta\circ Z^t$; il est donc adapté à $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{D_t}$. ∎

Proposition 24. — *Sur l'espace filtré* $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathbb{P}, \boldsymbol{\mathcal{F}})$*, soient* A *un ensemble aléatoire tel que la filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *soit pure dans* A*, et* Y *une martingale-araignée multiple.*

L'ensemble $\mathbf{G} = \{t \geqslant 0 : Y_t = \vec{0} \text{ et } \exists \varepsilon > 0 : Y \neq \vec{0} \text{ sur }]t, t+\varepsilon[\}$ *des débuts des excursions de* Y *vérifie* $\mathbf{G} \cap A = \varnothing$ *p. s.*

Démonstration. — Par définition de la pureté de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ dans A, il suffit de démontrer que si S et T sont deux temps d'arrêt vérifiant $S \leqslant T$ et si $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est pure entre S et T, alors $\mathbf{G} \cap [\![S, T]\!]$ est évanescent.

Si $S = \infty$ p. s., le résultat est trivial. Sinon, le processus $\vartheta_S Y$ défini par $(\vartheta_S Y)_t = Y_{S+t}$ est une martingale-araignée dans la filtration décalée $\vartheta_S \boldsymbol{\mathcal{F}}$ et pour la probabilité conditionnée $\mathbb{P}[\,\cdot\,|S < \infty]$. Ce décalage de S, qui respecte la pureté entre deux instants, permet de se ramener au cas où $S = 0$, ce que nous supposons dorénavant.

Puisque $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est pure entre 0 et T, il existe une martingale pure X telle que la filtration $\boldsymbol{\mathcal{G}} = \mathcal{F}_0 \vee \operatorname{Nat} X$ coïncide avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ sur $[\![0, T]\!]$ et que T soit un temps d'arrêt de $\boldsymbol{\mathcal{G}}$. Nous devons montrer que $\mathbf{G}$ ne rencontre pas $[\![0, T]\!]$; nous savons qu'il ne rencontre pas $[\![T]\!]$ (car les débuts des excursions des martingales évitent les temps d'arrêt) et il reste à établir qu'il ne rencontre pas $[\![0, T[\![$. Nous pouvons donc remplacer Y par l'arrêtée Y^T, qui est une martingale-araignée pour la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}^T = \boldsymbol{\mathcal{G}}^T$, et a fortiori pour $\boldsymbol{\mathcal{G}}$.

Le point (iii) de la définition des martingales pures permet alors, par plongement et changement de temps, de se ramener au cas où X est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^I$, $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est la filtration $\mathcal{F}_0 \vee \operatorname{Nat} X$, T est un temps d'arrêt de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et Y est une martingale-araignée vérifiant $Y = Y^T$. Ce cas brownien est traité par le théorème 2, qui montre que Y, et donc aussi Y^T, est absorbée par l'origine. ∎

Corollaire 6. — *Soit* Y *une martingale-araignée multiple dans la filtration naturelle d'un processus de Walsh* Z*. L'ensemble des débuts des excursions de* Y *est inclus dans l'ensemble* $\{Z = c\}$*.*

C'est une conséquence immédiate des propositions 23 et 24.

Proposition 25. — *Soit* Z *un processus de Walsh, de filtration naturelle* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$*, associé à un espace probabilisé* $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}}, \pi)$*.*

a) *Si* $\boldsymbol{\mathcal{V}}'$ *est une sous-tribu de* $\boldsymbol{\mathcal{V}}$*, il existe dans la filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *un processus de Walsh associé à* $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi)$*.*

b) *Réciproquement, soit* Z' *un processus de Walsh multiple, dans la filtration* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$*, associé à un espace probabilisé essentiellement séparable* $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi')$*. Les parties radiales* $R = \rho \circ Z$ *et* $R' = \rho' \circ Z'$ *de* Z *et* Z' *sont égales (et les processus* Z *et* Z' *ont donc les mêmes zéros :* $\{Z = c\} = \{Z' = c'\}$*) ; en outre, il existe un plongement de* $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi')$ *dans* $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}}, \pi)$*. En particulier,* Z *est lui aussi un processus de Walsh multiple.*

Remarque. — Le cas b) recouvre des situations beaucoup plus générales que celles du type $\Theta' = f \circ \Theta$ données par la proposition 20 : on peut par exemple avoir $\Theta'_t(\omega) = f\big(g_t(\omega), \omega, \Theta_t(\omega)\big)$, où f est une fonction qui dépend prévisiblement des deux premiers arguments et g_t le dernier zéro de R avant t.

Démonstration. — Le a) est trivial : c'est simplement la proposition 20 dans le cas de l'application identique de $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}})$ dans $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}}')$, qui est mesurable puisque $\boldsymbol{\mathcal{V}}'$ est une sous-tribu de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$.

b) Soient Q' une partition mesurable de $\mathbf{V}'$ en trois parties non négligeables, et Y' la martingale-araignée à trois composantes associée par la proposition 22 à Z' et Q'. Le corollaire 6 dit que l'ensemble $\mathbf{G}'$ des débuts des excursions de Y' est inclus dans le fermé $\{Z = c\}$. Puisque Q' est une partition, les débuts d'excursions de Y' et de Z' sont les mêmes (ce sont ceux du brownien réfléchi R') ; puisque $\{Z' = c'\}$ est d'intérieur vide, $\mathbf{G}'$ y est dense. Son adhérence est aussi incluse dans $\{Z = c\}$, et tout zéro de Z' est donc un zéro de Z. Pour tout t, le début D_t de $\{Z = c\} \cap [\![t, \infty[\![$ et le début D'_t de $\{Z' = c'\} \cap [\![t, \infty[\![$ vérifient donc $D_t \leqslant D'_t$; mais D_t et D'_t ont même loi (car R et R' sont tous deux des browniens réfléchis issus de l'origine) ; ceci implique $D_t = D'_t$ p. s. Comme R et R' sont des browniens réfléchis dans la filtration $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, on a p. s. pour t fixé

$$\mathbb{P}[D_t < t+1|\boldsymbol{\mathcal{F}}_t] = 2\,\mu\big([R_t, \infty[\big) \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}[D'_t < t+1|\boldsymbol{\mathcal{F}}_t] = 2\,\mu\big([R'_t, \infty[\big) ,$$

où μ est la loi normale centrée et réduite ; on en tire $\mu\big([R_t, \infty[\,\big) = \mu\big([R'_t, \infty[\,\big)$, puis $R_t = R'_t$ p. s. Ainsi, $R = R'$; la première assertion est établie.

Soient $T = \inf\{t : R_t = 1\}$ et G le dernier zéro de R avant T. Si f et f' sont des fonctions mesurables sur $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, bornées et telles que $\pi(f) = \pi'(f') = 0$, les processus $M^f = f(\Theta)\,R$ et $N^{f'} = f'(\Theta')\,R$ sont des martingales de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ par définition des processus de Walsh ; elles sont bornées sur $[\![0, T]\!]$. De $M^f_G = N^{f'}_G = 0$, la proposition 13 c) permet de déduire que $\mathbb{E}[M^f_T|\boldsymbol{\mathcal{F}}_G] = \mathbb{E}[N^{f'}_T|\boldsymbol{\mathcal{F}}_G] = 0$, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[f(\Theta_T)|\boldsymbol{\mathcal{F}}_G] = \mathbb{E}[f'(\Theta'_T)|\boldsymbol{\mathcal{F}}_G] = 0 .$$

Si l'on ne suppose plus que f et f' sont d'intégrale nulle, ces égalités deviennent $\mathbb{E}[f(\Theta_T)|\boldsymbol{\mathcal{F}}_G] = \pi(f)$ et $\mathbb{E}[f'(\Theta'_T)|\boldsymbol{\mathcal{F}}_G] = \pi'(f')$; ceci établit que Θ_T et Θ'_T sont indépendants de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_G$ et de lois respectives π et π'.

Ils sont en outre mesurables pour $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{G+}$ car $\Theta_T = \Theta_{(G+\varepsilon)\wedge T}$ (et de même pour Θ'_T) pour tout $\varepsilon > 0$. L'appendice de [4] montre que $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{G+} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_G \vee \sigma(\Theta_T)$. En prenant $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_G$, $\boldsymbol{\mathcal{C}} = \sigma(\Theta_T)$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}} = \sigma(\Theta'_T)$ dans le lemme 2, on obtient l'existence d'un plongement de $(\Omega, \sigma(\Theta'_T), \mathbb{P})$ dans $(\Omega, \sigma(\Theta_T), \mathbb{P})$. Ceci termine la démonstration, puisque, les lois de Θ_T et Θ'_T étant π et π', $(\Omega, \sigma(\Theta_T), \mathbb{P})$ est isomorphe à $(\mathbf{V}, \boldsymbol{\mathcal{V}}, \pi)$ et $(\Omega, \sigma(\Theta'_T), \mathbb{P})$ à $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi')$. ∎

Théorème 4. — *Soient Z' et Z'' deux processus de Walsh multiples, définis sur des espaces probabilisés $(\Omega', \boldsymbol{\mathcal{A}}', \mathbb{P}')$ et $(\Omega'', \boldsymbol{\mathcal{A}}'', \mathbb{P}'')$, et associés à des espaces probabilisés essentiellement séparables $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi')$ et $(\mathbf{V}'', \boldsymbol{\mathcal{V}}'', \pi'')$.*

Les deux espaces filtrés $(\Omega', \sigma(Z'), \mathbb{P}', \mathrm{Nat}\,Z')$ et $(\Omega'', \sigma(Z''), \mathbb{P}'', \mathrm{Nat}\,Z'')$ sont isomorphes si et seulement si les espaces probabilisés $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi')$ et $(\mathbf{V}'', \boldsymbol{\mathcal{V}}'', \pi'')$ le sont.

Démonstration. — S'il existe un isomorphisme $\Phi : (\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi') \longrightarrow (\mathbf{V}'', \boldsymbol{\mathcal{V}}'', \pi'')$, on peut définir $\Psi : \mathrm{L}^0(\Omega', \sigma(Z'), \mathbb{P}') \longrightarrow \mathrm{L}^0(\Omega'', \sigma(Z''), \mathbb{P}'')$ à l'aide du lemme 1, comme étant l'unique isomorphisme qui transforme tout événement de la forme $\big\{R' {\in} C, \Theta'_{t_1} {\in} D_1, ..., \Theta'_{t_n} {\in} D_n\big\}$ en $\big\{R'' {\in} C, \Theta''_{t_1} {\in} \Phi(D_1), ..., \Theta''_{t_n} {\in} \Phi(D_n)\big\}$. Ces deux événements ont en effet même probabilité, car les vecteurs aléatoires $(\mathbb{1}_{D_1}, ..., \mathbb{1}_{D_n})$ et $\big(\Phi(\mathbb{1}_{D_1}), ..., \Phi(\mathbb{1}_{D_n})\big)$ ont même loi; et la condition de compatibilité est satisfaite, car Φ est un isomorphisme. On a $\Psi(Z') = Z''$, d'où $\Psi(\mathrm{Nat}\, Z') = \mathrm{Nat}\, Z''$, et les deux espaces filtrés $(\Omega', \sigma(Z'), \mathbb{P}', \mathrm{Nat}\, Z')$ et $(\Omega'', \sigma(Z''), \mathbb{P}'', \mathrm{Nat}\, Z'')$ sont isomorphes.

Réciproquement, s'il existe un isomorphisme Ψ de $(\Omega', \sigma(Z'), \mathbb{P}', \mathrm{Nat}\, Z')$ vers $(\Omega'', \sigma(Z''), \mathbb{P}'', \mathrm{Nat}\, Z'')$, la filtration naturelle de $\Psi(Z')$ est $\Psi(\mathrm{Nat}\, Z') = \mathrm{Nat}\, Z''$; chacun des deux processus de Walsh multiples $\Psi(Z')$ et Z'' vit dans la filtration naturelle de l'autre, et, par la proposition 25, chacun des deux espaces $(\mathbf{V}', \boldsymbol{\mathcal{V}}', \pi')$ et $(\mathbf{V}'', \boldsymbol{\mathcal{V}}'', \pi'')$ peut être plongé dans l'autre. Ils sont donc isomorphes d'après la proposition 3. ∎

Références

[1] J. Azéma, T. Jeulin, F. Knight, G. Mokobodzki & M. Yor. Sur les processus croissants de type injectif. *Séminaire de Probabilités XXX*, Lecture Notes in Mathematics 1626, Springer 1996.

[2] J. Azéma, P. A. Meyer & M. Yor. Martingales relatives. *Séminaire de Probabilités XXVI*, Lecture Notes in Mathematics 1526, Springer 1992.

[3] J. Azéma & M. Yor. Sur les zéros des martingales continues. *Séminaire de Probabilités XXVI*, Lecture Notes in Mathematics 1526, Springer 1992.

[4] M.T. Barlow, J.W. Pitman & M. Yor. On Walsh's Brownian motions. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[5] F. Delbaen. A remark on Slutsky's theorem. Dans ce volume.

[6] C. Dellacherie & P. A. Meyer. Probabilités et Potentiel. Chapitres V à VIII. Hermann, 1980.

[7] C. Dellacherie, B. Maisonneuve & P. A. Meyer. Probabilités et Potentiel. Chapitres XVII à XXIV : Processus de Markov (fin), Compléments de calcul stochastique. Hermann, 1992.

[8] L.E. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinsky & B. Tsirelson. Decreasing sequences of σ-fields and a measure change for Brownian motion. *Ann. Prob. 24,* 882–904, 1996.

[9] P.R. Halmos. The decomposition of measures. *Duke Math. J. 9,* 386–392, 1941.

[10] J.M. Harrison & L.A. Shepp. On skew Brownian motion. *Ann. Prob. 9,* 309–313, 1981.

[11] K. Itô & H.P. McKean, Jr. Diffusion Processes and their Sample Paths. Springer, 1965.

[12] F.B. Knight. Poisson representation of strict regular step filtrations. *Séminaire de Probabilités XX*, Lecture Notes in Mathematics 1204, Springer 1986.

[13] D. Maharan. On homogeneous measure algebras. *Proc. Nat. Acad. Sc. 28,* 108–111, 1942.

[14] P.A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer 1976.

[15] P.A. Meyer, R.T. Smythe & J.B. Walsh. Birth and death of Markov processes. *Proc. 6^{th} Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab. 3,* 295–305, 1972.

[16] J. Neveu. Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B, 12,* 105–109, 1976.

[17] C. Rainer. Fermés marqués, filtrations lentes, équations de structure. Thèse de Doctorat de l'Université de Paris VI, 1994.

[18] D. Revuz & M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer, 1991.

[19] W. Schachermayer. On certain probabilities equivalent to Wiener measure, d'après Dubins, Feldman, Smorodinsky and Tsirelson. À paraître au *Séminaire de Probabilités XXXIII.*

[20] B. Tsirelson. Triple points: From non-Brownian filtrations to harmonic measures. *GAFA, Geom. funct. anal. 7,* 1096–1142, 1997.

[21] E. Vernocchi. Considerazioni sul moto browniano di Walsh. Tesi di Laurea, Università degli Studi di Milano, 1993.

[22] J.B. Walsh. A diffusion with a discontinuous local time. *Temps Locaux, Astérisque 52-53,* 37–45, 1978.

[23] M. Yor. Sur l'étude des martingales continues extrémales. *Stochastics 2,* 191–196, 1979.

[24] M. Yor. Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semimartingales. *Temps Locaux, Astérisque 52-53,* 23–35, 1978.

[25] M. Yor. Sur le balayage des semimartingales continues. *Séminaire de Probabilités XIII*, Lecture Notes in Mathematics 721, Springer 1979.

[26] M. Yor. Some Aspects of Brownian Motion. Part II: Some Recent Martingale Problems. *Lectures in Mathematics,* ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Martin T. Barlow
Department of Mathematics
University of British Columbia
Vancouver, B. C. V6T 1Y4
Canada
barlow@heron.math.ubc.ca

Michel Émery
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
emery@math.u-strasbg.fr

Frank B. Knight
Department of Mathematics
University of Illinois
1409 West Green Street
Urbana, Illinois 61801
U.S.A.

Shiqi Song
Département de Mathématiques
Université d'Évry
Boulevard des Coquibus
91025 Évry Cedex
Shiqi.Song@lami.univ-evry.fr

Marc Yor
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05