

ON CONVERGENCE OF SEMIMARTINGALES

by

Martin T. Barlow¹
Statistical Laboratory
16 Mill Lane
Cambridge CB2 15B
England

and

Philip Protter²
Mathematics and
Statistics Departments
Purdue University
W. Lafayette, IN 47907
U.S.A.

Technical Report #89-07

Department of Statistics
Purdue University

April 1989

¹ Supported by a NSF grant while visiting Cornell University

² Supported in part by NSF grant #DMS-8805595

ON CONVERGENCE OF SEMIMARTINGALES

by

Martin T. Barlow¹ Statistical Laboratory 16 Mill Lane Cambridge CB2 15B England	and	Philip Protter² Mathematics and Statistics Departments Purdue University W. Lafayette, IN 47907 U.S.A.
---	-----	---

Let X be a semimartingale. A norm commonly used on the space of semimartingales is the $\mathcal{H}^p$ norm: One defines

$$j_p(M, A) = \| [M, M]_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |dA_s| \|_{L^p}$$

for any decomposition $X = M + A$ with M a local martingale and A an adapted, right continuous process with paths of finite variation on compacts. Then

$$\|X\|_{\mathcal{H}^p} = \inf_{X=M+A} j_p(M, A)$$

where the infimum is taken over all such decompositions of X . Then as is well known (see, for example, Emery [2] or Protter [7], Theorem 2 of Chapter V):

$$\|X^*\|_{L^p} \leq c_p \|X\|_{\mathcal{H}^p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

where $X^* = \sup_t |X_t|$, and c_p is a universal constant. An immediate consequence is that if a sequence of semimartingales X^n converges to X in $\mathcal{H}^1$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{(X^n - X)^*\} = 0$$

as well.

In this paper we examine the converse question: if $X^n = M^n + A^n$ is a sequence of semimartingales converging uniformly in L^1 to a process X , what can be said about the convergence of the M^n and A^n processes of the decompositions? Such a question

¹ Supported by a NSF grant while visiting Cornell University

² Supported in part by NSF grant #DMS-8805595

is closely related to recent work on weak convergence of semimartingales: In particular Jacod-Shiryaev [3], Jakubowski-Mémin-Pages [4], and Kurtz-Protter [5].

The examination of two simple examples illustrates the problems that arise and shows that one cannot expect a full converse.

Let Y be any continuous, adapted process with $Y_0 = 0$ and Y constant on $[1, \infty)$; set

$$X_t^n = n \int_{t-1/n}^t Y_s ds 1_{\{t > 1/n\}}.$$

Then X^n is a differentiable function of t in $[\frac{1}{n}, \infty)$ for each n and in particular each X^n is of finite variation (and hence it is a semimartingale). However the limit Y need not be a semimartingale.

The preceding example indicates that we have to impose some type of uniform bound on the total variation of the A^n processes. But even if we do this we cannot hope always to obtain convergence of the A^n processes in total variation norm. Indeed, let $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, and define $A_t^n = \frac{1}{n} \sin nt$. Then $\int_0^{\pi/2} |dA_s^n| = 1$, but $(A^n)^*$ converges to zero.

The following theorem avoids the pathologies of the two preceding examples. Recall that a semimartingale X in $\mathcal{H}^1$ is special: that is, it always has a unique decomposition $X = X_0 + M + A$, where $M_0 = A_0 = 0$, and the finite variation process A is predictable. Such a decomposition is said to be the canonical decomposition.

Theorem 1. Let X^n be a sequence of semimartingales in $\mathcal{H}^1$ with canonical decomposition $X^n = X_0^n + M^n + A^n$, satisfying for some constant K ,

$$(1a) \quad E\left\{\int_0^\infty |dA_s^n|\right\} \leq K$$

$$(1b) \quad E\{(M^n)^*\} \leq K.$$

Let X be a process, and suppose that

$$(2) \quad E\{(X^n - X)^*\} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Then X is a semimartingale in $\mathcal{H}^1$, and if $X = X_0 + M + A$ is its canonical decomposition we have

$$(3) \quad E\{M^*\} \leq K, \quad E\left\{\int_0^\infty |dA_s|\right\} \leq K$$

and

$$(4a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n - M\|_{\mathcal{H}^1} = 0,$$

$$(4b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E\{(A^n - A)^*\} = 0.$$

Corollary 2. Let (X^n) be a sequence of special semimartingales with canonical decomposition $X^n = X_0^n + M^n + A^n$, where the A^n satisfy (1a). Then if X is a process such that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(X^n - X)^*\|_{L^1} = 0$, X is a special semimartingale. Further if $X = X_0 + M + A$ is its canonical decomposition, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n - M\|_{\mathcal{H}^1} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E\{(A^n - A)^*\} = 0, \quad E\left\{\int_0^\infty |dA_s|\right\} \leq K.$$

Proof. By deleting a finite number of terms in the sequence (X^n) , we may suppose that $E\{(X^n - X)^*\} \leq K$ for $n \geq 1$. But then

$$\begin{aligned} E\{(M^n - M^1)^*\} &\leq E\{|X_0^n - X_0^1|\} + E\{(X^n - X)^*\} + E\{(A^n - A^1)^*\} \\ &\leq 4K. \end{aligned}$$

So write $\tilde{X}^n = X^n - M^1 = X_0^n + (M^n - M^1) + A^n$, $\tilde{X} = X - M^1$. Then the hypotheses of Theorem 1 hold for $\tilde{X}^n$, $\tilde{X}$ and the conclusion follows easily. $\square$

The proof of Theorem 1 uses some ideas from Kurtz and Protter [5], and it also needs the following martingale inequality.

Proposition 3. Let $p \geq 1/2$, M be a martingale in $\mathcal{H}^{2p}$ and K be a predictable process with $K^* \in L^{2p}$. Then

$$\|(K \cdot M)^*\|_{L^p} \leq c_p \|K^*\|_{L^{2p}} \|M^*\|_{L^{2p}}.$$

Proof. Recall the Davis decomposition of M — see Meyer [6, p. 80–81]. Let $\Delta M_s = M_s - M_{s-}$. Let $A_t = \sup_{s \leq t} |\Delta M_s|$: then $M = N + U$, where N is a martingale with $|\Delta N_t| \leq A_{t-}$, and U is a martingale with paths of integrable variation satisfying

$$\| \int |dU_s| \|_{L^q} \leq c_q \|A_\infty\|_{L^q}, \quad q \geq 1.$$

Further, we have the pointwise inequalities

$$\begin{aligned} A_\infty &\leq 2M^*, \\ [N]_\infty^{1/2} &\leq [M]_\infty^{1/2} + [U]_\infty^{1/2}, \\ [U]_\infty^{1/2} &\leq 4A_\infty. \end{aligned}$$

Now $(K \cdot M)^* \leq (K \cdot N)^* + (K \cdot U)^*$, and $|\Delta(K \cdot N)_t| \leq K_t^* A_t$. Hence, by Meyer [6], Theorem 2 on p. 76,

$$\begin{aligned} \|(K \cdot M)^*\|_{L^p} &\leq c_p (\|([K \cdot N]_\infty + (K^* A_\infty)^2)^{1/2}\|_{L^p} + \|(K \cdot U)^*\|_{L^p}) \\ &\leq c_p (\|[K \cdot N]_\infty^{1/2} + K^* A_\infty\|_{L^p} + \|(K \cdot U)^*\|_{L^p}) \\ &\leq c_p (\|K^* [N]_\infty^{1/2}\|_{L^p} + \|K^* M^*\|_{L^p} + \|\int |K_s| |dU_s|\|_{L^p}) \\ &\leq c_p (\|K^* [M]_\infty^{1/2}\|_{L^p} + \|K^* M^*\|_{L^p} + \|K^* \int |dU_s|\|_{L^p}). \end{aligned}$$

The proof is concluded by applying Holder's inequality, and noting that $\|\int |dU_s|\|_{L^{2p}} \leq c_p \|M^*\|_{L^{2p}}$. (The constant c_p changes from place to place in the preceding.) $\square$

Remarks. 1. Of course, for $p \geq 1$ this inequality is an immediate consequence of the Burkholder-Davis-Gundy inequalities.

2. This inequality is not true in general for $0 < p < 1/2$.

Proof of Theorem 1. First note that as X is the a.s. uniform limit of a subsequence of the X^n , X is cadlag. Also, as $\|X_0^n - X_0\|_{L^1} \rightarrow 0$, we may take $X_0^n = X_0 = 0$.

Let H be an elementary predictable process, that is a process of the form

$$H_t = \sum_{i=1}^k h_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

where $h_i \in \mathcal{F}_{t_i}$, $|h_i| \leq 1$, and $t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Then writing $H \cdot X$ for the elementary stochastic integral of H with respect to X , $t_{k+1} = \infty$, we have

$$\begin{aligned} E\{(H \cdot X)_\infty\} &= E\left\{\sum_{i=1}^{k+1} h_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{\sum_{i=1}^{k+1} h_i(X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n)\right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left\{\int_0^\infty H_t dA_t^n\right\} \leq K. \end{aligned}$$

So by the Bichteler-Dellacherie theorem (e.g., Dellacherie-Meyer [1]) X is a quasimartingale, and therefore a special semimartingale. Hence X has a canonical decomposition $X = M + A$, with M a local martingale and A a predictable finite variation process. Choose a sequence (T_k) reducing M . Then, if H is an elementary predictable process, $E\{(H \cdot A)_{T_k}\} = E\{(H \cdot X)_{T_k}\} = \lim_n E\{(H \cdot X^n)_{T_k}\} \leq K$. Thus

$$E\left\{\int_0^{T_k} |dA_s|\right\} \leq K, \quad \text{for each } k \geq 1,$$

and hence $E\{\int_0^\infty |dA_s|\} \leq K$.

Now $M = X - A = (X - X^n) + (M^n + A^n) - A$, and so

$$M^* \leq (X - X^n)^* + (M^n)^* + \int_0^\infty |dA_s^n| + \int_0^\infty |dA_s|.$$

Thus $E\{M^*\} \leq 3K < \infty$, and M is a martingale in $\mathcal{H}^1$. Set $Y^n = X^n - X$, $N^n = M^n - M$, $B^n = A^n - A$: We have

$$E\left\{\int_0^\infty |dB_s^n|\right\} \leq 2K, \quad E\{(N^n)^*\} \leq 2K, \quad \lim_n E\{(Y^n)^*\} = 0.$$

To complete the proof it is enough to prove that

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E\{[Y^n]_\infty^{1/2}\} = 0.$$

For then, by Dellacherie and Meyer [1], section VII.95, we have $E\{[B^n]^{1/2}\} \leq 2E\{[Y^n]^{1/2}\}$. Hence, as $[N^n]^{1/2} \leq [B^n]^{1/2} + [Y^n]^{1/2}$, $E\{[N^n]_\infty^{1/2}\} \leq 3E\{[Y^n]_\infty^{1/2}\}$, so that $\lim_{n \rightarrow \infty} \|N^n\|_{\mathcal{H}^1} = 0$. This implies that $E\{(M^n - M)^*\} \rightarrow 0$, and hence that $\lim_n E\{(A^n - A)^*\} \rightarrow 0$. Finally, $E\{M^*\} \leq K$ follows from (4a) and (1b).

To show that $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{[Y^n]_\infty^{1/2}\} = 0$, use integration by parts to conclude

$$[Y^n]_\infty = (Y_\infty^n)^2 - 2 \int_0^\infty Y_{s-}^n dN_s^n - 2 \int_0^\infty Y_{s-}^n dA_s^n,$$

and so, writing $U^n = Y_-^n \cdot N^n$,

$$(6) \quad E\{[Y^n]_\infty^{1/2}\} \leq E\{(Y^n)^*\} + 2^{1/2} E\{((U^n)^*)^{1/2}\} + 2^{1/2} E\{(\int_0^\infty |Y_{s-}^n| |dA_s^n|)^{1/2}\}.$$

By Proposition 2

$$\begin{aligned} E\{((U^n)^*)^{1/2}\} &\leq c(E\{(Y^n)^*\})^{1/2}(E\{(N^n)^*\})^{1/2} \\ &\leq cK^{1/2}(E\{(Y^n)^*\})^{1/2}. \end{aligned}$$

Similarly, the third term in (6) is dominated by

$$\begin{aligned} E\{((Y^n)^* \int_0^\infty |dA_s^n|)^{1/2}\} &\leq (E\{(Y^n)^*\})^{1/2} (E\{\int_0^\infty |dA_s^n|\})^{1/2} \\ &\leq K^{1/2} (E\{(Y^n)^*\})^{1/2}. \end{aligned}$$

Thus $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{[Y^n]_\infty^{1/2}\} = 0$. □

References

1. C. Dellacherie, P. A. Meyer, "Probabilities and Potential B," North-Holland, Amsterdam New York (1982).
2. M. Emery, Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; applications aux intégrales multiplicatives stochastiques; Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 41 (1978), 241–262.
3. J. Jacod, A. N. Shiryaev, "Limit Theorems for Stochastic Processes," Springer, Berlin Heidelberg New York (1987).
4. A. Jakubowski, J. Mémin, G. Pages, Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorohod; to appear in Probability Theory and Related Fields.
5. T. Kurtz, P. Protter, Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations; preprint.

6. P. A. Meyer, "Martingales and Stochastic Integrals I," Springer Lecture Notes in Mathematics 284 (1972).
7. P. Protter, "Stochastic Integration and Differential Equations: A New Approach," Springer-Verlag, forthcoming.

UNE EXTENSION MULTIDIMENSIONNELLE DE LA LOI DE L'ARC SINUS *

Martin BARLOW

Trinity College

Cambridge CB2 1TQ

England

Jim PITMAN

Department of Statistics

University of California

Berkeley, California 94720

United States

Marc YOR

Laboratoire de Probabilités

Université P. et M. Curie

4, place Jussieu - Tour 56

75252 Paris Cedex 05, France

1. Introduction.

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0. On note :

$$g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\} \quad \text{et} \quad A_t = \int_0^t ds \, 1_{(B_s > 0)}.$$

Remarquons que, pour $t > 0$ donné, on a :

$$g_t \stackrel{(loi)}{\sim} t g_1 \quad \text{et} \quad A_t \stackrel{(loi)}{\sim} t A_1.$$

P. Lévy ([11a], [11b]) a montré que les variables g_1 et A_1 suivent la loi de l'arc sinus, c'est-à-dire :

$$(1.a) \quad P(g_1 \in dt) = P(A_1 \in dt) = \frac{dt}{\pi \sqrt{t(1-t)}} \quad (0 < t < 1)$$

De nombreuses démonstrations de ces résultats ont maintenant été données (voir, par exemple, Kac [13], Williams [12], Pitman-Yor [7], Karatzas-Shreve [5], Rogers-Williams [8] section 53) ; P. Lévy [11a] et Pitman-Yor [7] utilisent le fait que les variables suivantes :

$$(1.b) \quad \frac{\sigma}{\sigma + \tilde{\sigma}} \stackrel{(loi)}{\sim} \frac{N^2}{N^2 + \tilde{N}^2} \stackrel{(loi)}{\sim} \cos^2 \theta$$

suivent la loi de l'arc sinus, lorsque σ et $\tilde{\sigma}$ désignent deux copies indépendantes du premier temps d'atteinte de 1 par $(B_t, t \geq 0)$, N et $\tilde{N}$ sont deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes, et θ est une variable uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$.

La démonstration de (1.b) repose sur les deux remarques suivantes :

$$(i) \quad (\sigma, \tilde{\sigma}) \stackrel{(loi)}{\sim} \left(\frac{1}{\tilde{N}^2}, \frac{1}{N^2} \right)$$

* Ce travail a été réalisé avec l'aide partielle de NSF Grant DMS 88 - 01808

- de l'égalité :
$$E \left[\int_0^\infty dt e^{-\xi \tau(t)} \right] = E \left[\int_0^\infty d\ell_s e^{-\xi s} \right],$$

et de la propriété de scaling (2.b), on déduit :

$$\beta_\mu \equiv E[\ell_1] = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}$$

- d'autre part, d'après (2.a) et la propriété de scaling vérifiée par R, on a :

$$\alpha_\mu \beta_\mu x^{\delta-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \int_0^1 du p_1(0; \frac{x}{u})$$

$$\text{où } p_1(0; y) = \frac{2}{2^{\delta/2} \Gamma(\frac{\delta}{2})} y^{\delta-1} \exp(-\frac{y^2}{2})$$

est la valeur du semi-groupe de R, issu de 0, pris au temps 1.

$$\text{Finalement, on obtient : } \alpha_\mu = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(1-\mu)} 2^\mu.$$

(2.2) Terminons ce paragraphe par deux remarques :

(i) on déduit des propriétés de scaling (2.b) et (2.c) l'identité :

$$(2.d) \quad \tau(1) \stackrel{(loi)}{=} \ell_1^{-\nu}.$$

Cette identité (2.d) est bien en accord avec le résultat suivant tiré du théorème 1, (ii)

$$(2.e) \quad \ell_1^{-\nu} \stackrel{(loi)}{=} \sum_{j=1}^k p_j^\nu T_j$$

puisque le membre de droite de (2.e) a même loi que T_j , pour j donné.

(ii) L'égalité (1.f) $\ell_1^\nu = g \lambda^\nu$ provient de ce que, de même qu'en (2.a), on définit la famille continue $(\lambda^x ; x \geq 0)$ au moyen de la formule :

$$\int_0^1 ds f(Y_s) = \alpha_\mu \int_0^\infty dx x^{\delta-1} \lambda^x f(x)$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne.

(1.f) découle alors de la définition de $Y_u = \frac{1}{\sqrt{g}} X_{ug}$ ($u \leq 1$).

$$= \exp - \left[\sum_{i=1}^k p_i (s^\nu + \xi_i)^\mu \right] \equiv \exp - \varphi(s).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{n(de)} \int_0^V du \exp - \left[u + \frac{A(u)}{s^\nu} \right] \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \int_{n_i(de)} \int_0^V du \exp - \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu} \right] u \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \frac{1}{\left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu} \right]} \int_{n_i(de)} \left[1 - \exp - \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu} \right] V \right] \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu} \right]^{\mu-1} = \left[\sum_{i=1}^k p_i (s^\nu + \xi_i)^{\mu-1} \right] s^{\nu-1} \equiv \varphi'(s). \end{aligned}$$

On a donc finalement, d'après (3.b) :

$$E \left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^\nu} \right] = \int_0^\infty ds \exp(-\varphi(s)) \varphi'(s) = \exp - \varphi(0) = \exp - \sum_{i=1}^k p_i \xi_i^\mu,$$

c'est-à-dire (3.a).

(3.3) Pour prouver l'assertion (i) du théorème 2, il suffit de montrer, avec les notations déjà utilisées en (3.2), l'identité suivante :

$$(3.c) \quad E \left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu} \right] = E \left[\exp \left[- \sum_{i=1}^k \xi_i p_i^\nu T_i \right] \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left[\sum_{i=1}^k p_i^\nu T_i \right]^\mu} \right].$$

Or, en reprenant les mêmes arguments que ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} E \left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu} \right] &= E \left[\int_0^\infty du \exp - \left[u + \frac{A(g_u)}{\ell_u^\nu} \right] \right] \\ &= E \left[\sum_s \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} du \exp - \left[u + \frac{A(\tau_{s-})}{s^\nu} \right] \right] \\ &= \int_0^\infty ds \exp - s \sum_{i=1}^k p_i \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu} \right]^\mu \end{aligned}$$

$$E(f(U_1)) = \frac{1}{2} \int_0^1 du f(u) \frac{pq}{(p^2(1-u)+q^2u)^{3/2}}.$$

Remarque : On retrouve bien les résultats de Paul Lévy dans le cas $p = q = 1/2$, c'est-à-dire que $A_1(1)$ suit la loi de l'arc sinus, et U_1 la loi uniforme sur $[0,1]$. $\square$

Nous donnons maintenant une description, de nature moins calculatoire, de la loi du vecteur $((A_i(1), i \leq k) ; \ell_1^2)$.

Proposition 1 : Soient $\underline{x}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ variable aléatoire distribuée uniformément sur la sphère unité de $\mathbb{R}^k$, et $Z_{k/2}$ une variable aléatoire indépendante, suivant la loi gamma de paramètre $\frac{k}{2}$, c'est-à-dire :

$$P(Z_{k/2} \in dr) = r^{\frac{k}{2}-1} e^{-r} dr / \Gamma(\frac{k}{2}).$$

Alors :

$$1) ((A_i(1), i \leq k) ; \frac{1}{2} \ell_1^2) \stackrel{(loi)}{=} \left[\frac{(p_i/x_i)^2}{\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2}, i \leq k ; \frac{2Z_{k/2}}{\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2} \right]$$

2) En conséquence :

$$i) \left[\sum_{j=1}^k p_j^2 / A_j(1) \right]^{-1} \stackrel{(loi)}{=} \left[\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2 \right]^{-1}$$

et ces deux variables, à valeurs dans $[0,1]$, suivent la loi $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$, c'est-à-dire :

$$\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{k-1}{2})} t^{-1/2} (1-t)^{\frac{k-3}{2}} dt$$

$$ii) (x_i^2 ; i \leq k) \stackrel{(loi)}{=} \left[\frac{p_i^2 / A_i(1)}{\sum_{j=1}^k p_j^2 / A_j(1)} ; i \leq k \right]$$

iii) Conditionnellement à $(A_i(1) = a_i ; i \leq k)$, $\frac{1}{2} \ell_1^2$ a même loi que

$$(2a_*) Z_{k/2}, \text{ où } a_* = \left[\sum_{j=1}^k p_j^2 / a_j \right]^{-1}.$$

Démonstration : 1) La première assertion découle du Théorème 1 et des deux remarques suivantes :

- d'une part, $(2T_1 ; i \leq k) \stackrel{(loi)}{=} (1/N_1^2 ; i \leq k)$

2) Au passage, nous avons identifié la loi de $H = \left[\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2 \right]^{-1}$ comme étant $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$; en particulier, cette loi ne dépend pas de la probabilité $(p_i)_{i \leq k}$.

Bien entendu, ce résultat peut être obtenu en dehors de toute considération brownienne, et repose essentiellement sur les faits bien connus suivants: d'une part, si $T_1, \dots, T_n$ sont n variables stables, d'indice $1/2$, indépendantes, $T = \sum_{i=1}^n p_i^2 T_i$ est également stable d'indice $1/2$, et, d'autre part, $2T \stackrel{(loi)}{=} 1/N^2$, où N est une variable gaussienne, centrée, réduite.

(4.2) Transformées de Laplace.

Considérons à nouveau l'énoncé du théorème 1. L'idée de diviser le vecteur $(A_i(u) ; i \leq k)$ par ℓ_u^ν , de façon à obtenir un résultat simple, nous est venue tout à la fin de notre étude. Auparavant, nous avons simplement procédé par transformation de Laplace, et obtenu les résultats suivants, qui conservent néanmoins leur intérêt.

Théorème 4 : Soient $\alpha > 0$ et $\xi_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq k$). Alors :

$$(4.a) \quad E \left[\int_0^\infty dt \exp - \left[\alpha t + \sum_{j=1}^k \xi_j A_j(t) \right] \right] = \frac{\sum_{j=1}^k p_j (\alpha + \xi_j)^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^k p_j (\alpha + \xi_j)^\mu}$$

$$(4.b) \quad E \left[\int_0^\infty dt \exp - \left[\alpha t + \sum_{j=1}^k \xi_j A_j(g_t) \right] \right] = \frac{\alpha^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^k p_j (\alpha + \xi_j)^\mu}.$$

Faisons quelques commentaires, avant de démontrer le théorème 4 :

a) Prenons, dans la formule (4.b), $\xi_j = \xi$ pour tout $j \leq k$.

On obtient alors, en choisissant de plus $\alpha = 1$:

$$E \left[\int_0^\infty dt \exp - (t + \xi g_t) \right] = (1+\xi)^{-\mu}.$$

Si l'on note $g_\mu = g(1) = \sup\{s \leq 1 : X_s = 0\}$, et S une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante de g_μ , on peut réécrire, à l'aide de la

la variable γ_μ étant indépendante du vecteur $(U_j, j \leq k)$.

En utilisant à nouveau (4.c), on remarque que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est égal à :

$$E \left[\left(1 + \sum_{j=1}^k \xi_j U_j \right)^{-\mu} \right]$$

et, finalement, en remplaçant ξ_j par ξ_j/α , on obtient :

$$(4.b') \quad E \left[\left(\alpha + \sum_{j=1}^k \xi_j U_j \right)^{-\mu} \right] = \left(\sum_{j=1}^k p_j (\alpha + \xi_j)^\mu \right)^{-1}.$$

c) Lorsque l'on compare le théorème 1, resp : 2, à l'identité (4.a'), resp : (4.b'), la question suivante se pose naturellement : l'identité (4.a') (par exemple) détermine uniquement - même si l'on considère seulement $\alpha = 1$ - la loi du vecteur $(A_j(1), j \leq k)$.

Peut-on montrer directement (et simplement...) que cette loi est celle de

$$\left(\frac{p_j^\nu T_j}{\sum_{i=1}^k p_i^\nu T_i} ; j \leq k \right)$$

comme cela est démontré dans le théorème 1 ?

Nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

En effet, en posant $a_j = p_j^\nu$ et $b_j = p_j^\nu(1+\xi_j)$, cette question se ramène aisément à la démonstration de l'identité :

$$(4.f) \quad E \left[\frac{\sum_{j=1}^k a_j T_j}{\sum_{j=1}^k b_j T_j} \right] = \frac{\sum_{j=1}^k a_j b_j^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^k b_j^\mu}$$

identité valable pour tout k -uplet $(a_j, b_j)_{j \leq k}$ de couples (a_j, b_j) tels que : $0 \leq a_j \leq b_j$.

Remarque : A priori, on ne connaissait la validité de l'identité (4.f) que pour des réels positifs $a_j (= p_j^\nu)$ satisfaisant la condition :

mesure caractéristique des excursions de X hors de 0 .

Notons $g_t = \sup\{s \leq t : X_s = 0\}$.

Soit $(A_t, t \geq 0)$ fonctionnelle additive continue, croissante, de X , telle que, p.s., dA_s ne charge pas $\{s : X_s = 0\}$. On a alors les formules :

$$(4.g) \quad E \left[\int_0^\infty dt \exp - (\alpha t + A_t) \right] = \frac{\int n(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha t + A_t)}{\int n(de) (1 - \exp - (\alpha V + A_V))}$$

$$(4.h) \quad E \left[\int_0^\infty dt \exp - (\alpha t + A_{g_t}) \right] = \frac{\int n(de) (1 - e^{\alpha V})}{\int n(de) \left[1 - e^{-\alpha V - A_V} \right]}$$

où V désigne la durée de vie de l'excursion générique $(e(u), u \leq V)$.

Pour démontrer le théorème 4, il suffit d'appliquer le lemme à la fonction-

nelle $A_t = \sum_{j=1}^k \xi_j A_j(t)$. Alors, si l'on note n_μ une détermination, fixée une

fois pour toutes, de la mesure des excursions hors de 0 du processus de Bessel de dimension $\delta = 2(1-\mu)$, on a, par exemple :

$$\begin{aligned} \int n(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha t + A_t) &= \sum_{j=1}^k p_j \int n_\mu(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha + \xi_j)t \\ &= \sum_{j=1}^k p_j \frac{1}{(\alpha + \xi_j)} \int n_\mu(de) \left[1 - e^{-(\alpha + \xi_j)V} \right] \\ &= c_\mu \sum_{j=1}^k p_j (\alpha + \xi_j)^{\mu-1}, \end{aligned}$$

pour une certaine constante c_μ .

Les formules (4.a) et (4.b) découlent alors aisément de ce type de calculs.

(4.3) Un résultat asymptotique.

Nous considérons maintenant uniquement le processus de Walsh $W_k(\mu; (p_i)_{i \leq k})$ et le pont de Walsh correspondant, lorsque la probabilité $(p_i; i \leq k)$ est uniforme, c'est-à-dire : $p_i = \frac{1}{k}$ ($i \leq k$), et nous déduisons des Théorèmes 1 et 2 le résultat asymptotique suivant, lorsque $k \rightarrow \infty$.

$$(4.j) \quad \left\{ \left[\frac{1/k^\nu A_i(1)}{\sum_{j=1}^k 1/k^\nu A_j(1)}, i \leq p \right] ; \frac{1}{k^{\nu+1}} \sum_{j=1}^k \frac{1}{A_j(1)} \right\}$$

converge en loi, lorsque $k \rightarrow \infty$, vers :

$$(4.k) \quad \left\{ \left[\frac{1}{T_i \Gamma(\nu+1)} ; i \leq p \right] ; T_* \Gamma(\nu+1) \right\}.$$

Or, d'après la proposition 1, dans le cas brownien ($\nu = 2$), le terme qui figure à gauche en (4.j) a même loi que :

$$k \left[(x_k^{(1)})^2, \dots, (x_k^{(p)})^2 \right]$$

alors que le terme correspondant en (4.k) a même loi que :

$$(N_i^2, i \leq p).$$

La relation avec le lemme de Poincaré est donc établie.

- [12] D. Williams : Markov properties of Brownian local time.
Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1035-1036 (1969).
- [13] M. Kac : On some connections between probability theory and differential and integral equations.
Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability,
189-215 (1951), University of California Press.
- [14] M.T. Barlow, J.W. Pitman, M. Yor : On Walsh's Brownian Motions.
Dans ce volume*.
- [15] M.T. Barlow, J.W. Pitman, M. Yor : Some extensions of the arc sine law. Technical Report n° 189. Department of Statistics,
U.C. Berkeley (1989).
- [16] J. Kent : Some probabilistic properties of Bessel functions.
Ann. Prob. 6, 760-770 (1978).
- [17] S.A. Molchanov, E. Ostrovski : Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes.
Theory of Proba. and its App., vol. XIV, n° 1, 128-131 (1969).
- [18] E.B. Dynkin : Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectations.
Selected Transl. in Math. Stat. and Probability, vol. 1, 1961,
IMS-AMS, p. 171-189 (1961).

*In Department of Statistics, University of California, Berkeley
Technical Report No. 184.