

Example III.22 (Feldman's notes)

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 12 \end{bmatrix} \\ + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 12 \end{bmatrix} - 4 \det \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} = 3 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ = 3(36 - 27) - 2(36 - 24) + (27 - 24) \\ = 6$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 12 \end{bmatrix} = 4 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \\ = 4(36 - 27) - 2(24 - 21) + (18 - 21) \\ = 27$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 12 \end{bmatrix} = 4 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ = 4(36 - 24) - 3(24 - 21) + (16 - 21) \\ = 34$$

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = 4 \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ = 4(27 - 24) - 3(18 - 21) + 2(16 - 21) \\ = 11$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} = 6 - 2 \times 27 + 3 \times 34 - 4 \times 11 = 10$$