ESPACE DES PRO-p-INVARIANTS DES SÉRIES PRINCIPALES EN CARACTÉRISTIQUE p

Rachel Ollivier

Résumé. — Soient F un corps p-adique et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dans l'espoir de comprendre la semi-simplification des séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p, nous donnons celle de leurs espaces des pro-p-invariants. Ce sont naturellement des modules à droite sur la pro-p-algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_n(F)$ que nous étudions grâce aux entrelacements entre les modules standards réguliers introduits dans [**3**]. On en déduit en particulier l'irréductibilité des représentations de Steinberg généralisées relatives aux paraboliques maximaux.

Abstract. —

1. Notations

1.1. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p et de corps résiduel à q éléments. On désigne par O_F l'anneau des entiers de F. On choisit π une uniformisante de O_F, et val la valuation normalisée par $val(\pi) = 1$.

Soit $n \geq 1$. On considère le groupe linéaire général $G = \mathrm{GL}_n$, son sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures de tore maximal déployé T. Nous nous intéressons aux représentations lisses de $G(F)$ à cœfficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ici, on étudie en particulier les représentations obtenues par induction parabolique. On se réfère à [**3**, 1.3] pour le rappel des définitions. On ne précisera plus désormais que les représentations considérées sont lisses.

Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de $G(F)$, et $I(1)$ son unique pro-p-Sylow : I est l'image inverse, par la réduction modulo π, $G(O_F) \twoheadrightarrow G(\mathbb{F}_q)$, du sous-groupe de Borel $B(\mathbb{F}_q)$ tandis que $I(1)$ est l'image inverse du sous-groupe de $B(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices unipotentes. Les sous-groupes I et $I(1)$ de $G(F)$ sont ouverts et compacts. Ils sont normalisés par l'élément $\omega \in G(F)$ défini par

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ \pi & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mots clefs. — Pro-p-algèbre de Hecke, modules standards, entrelacements.

1.2. Soit $(X, X^\vee, \Phi, \Phi^\vee, \Delta, \Delta^\vee)$ la donnée radicielle affine basée associée à (G, B, T) [**2**, 1.]. On considère le groupe $X \simeq \mathbb{Z}^n$ comme un sous-groupe de $G(F)$ en l'identifiant avec le sous-groupe additif des matrices diagonales dont les cœfficients sont des puissances de π. On dit d'un élément de X qu'il est dominant si c'est une diagonale de la forme $(\pi^{v_1}, \pi^{v_2}, ..., \pi^{v_n})$ avec $v_1, ...v_n \in \mathbb{Z}$, $v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_n$. On note X_{dom} le semi-groupe constitué par les éléments dominants de X.

Le groupe de Weyl (fini) W de G est isomorphe au groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$. C'est un groupe de Coxeter de système générateur $S_0 = \{s_1, .., s_{n-1}\}$ où, pour $i \in \{1, .., n-1\}$, on désigne par s_i la transposition $(i, i+1)$. Cette réflexion est associée à la racine simple $\alpha_i \in \Delta$ où α_i est la diagonale $(1, ..., 1, \pi^{-1}, \pi, 1, ..., 1)$ avec π en position $i+1$. La coracine associée est
$$\alpha_i^\vee : (\pi^{v_1}, \pi^{v_2}, ..., \pi^{v_n}) \mapsto v_{i+1} - v_i.$$
La longueur sur le groupe de Weyl fini a les propriétés suivantes : pour $u, v \in W$,
$$\ell(u) = |\{\alpha \in \Phi^+, u(\alpha) \in \Phi^-\}|, \tag{1}$$

$$\ell(u) + \ell(v) - \ell(uv) = 2|\{\alpha \in \Phi^+,\ v(\alpha) \in \Phi^-,\ uv(\alpha) \in \Phi^+\}|. \tag{2}$$

Le groupe de Weyl affine est le groupe de Coxeter de système générateur $S = \{s_0, s_1, ..., s_{n-1}\}$ où $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$. Pour $s \in S$, on désigne par $\Theta_s : \mathrm{GL}_2 \to G$ le morphisme associé [**1**]. Pour $s \in S$, on pose
$$\delta_s = \Theta_s \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W}$ s'identifie au sous-groupe de $G(F)$ engendré par $\{s_1, \omega^{\pm 1}\}$. Il fournit un système de représentants des doubles classes de $G(F)$ modulo le sous-groupe d'Iwahori standard [**1**, Proposition 2.1]. Il est isomorphe au produit semi-direct $W.X$. La longueur ℓ du système de Coxeter affine se prolonge à $\tilde{W}$ de façon à ce que le sous-groupe engendré par ω soit l'ensemble des éléments de longueur nulle [**2**, 1.4].

1.3. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G(F), I(1))$ du pro-p-Iwahori de $G(F)$ sera notée $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Elle possède une présentation de type Iwahori-Matsumoto rappelée dans [**3**, 2.1]. On note $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ le groupe des $\mathbb{F}_q$-caractères du tore fini et Γ l'ensemble des W-orbites de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$. L'unité de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ se décompose en une somme d'idempotents centraux orthogonaux $(\epsilon_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de sorte que cette algèbre est le produit des $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres $\epsilon_\gamma \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, d'unité ϵ_γ et de base $(T_w \epsilon_\chi)_{w \in \tilde{W}, \chi \in \gamma}$ où T_w désigne l'élément de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ correspondant à la double classe $I(1)wI(1)$, avec les relations :

(a) pour $\chi,\ \chi' \in \gamma,\ \chi \neq \chi',\ \epsilon_\chi^2 = \epsilon_\chi,\ \epsilon_\chi \epsilon_{\chi'} = 0,\ \sum_{\chi \in \gamma} \epsilon_\chi = \epsilon_\gamma$,
(b) pour $w \in \tilde{W},\ \chi \in \gamma,\ T_w \epsilon_\chi = \epsilon_{w\chi} T_w$,
(c) pour $w,\ w' \in \tilde{W}$ tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, on a $T_w T_{w'} \epsilon_\gamma = T_{ww'} \epsilon_\gamma$,
(d) pour $s \in S$, $(T_s)^2 \epsilon_\gamma = -T_s \sum_{\chi \in \gamma,\, s\chi = \chi} \chi(\delta_s) \epsilon_\chi$.

Comme dans [**3**, 2.1.1], on définit pour $w \in \tilde{W}$ l'élément T^*_w. Il vérifie $T_w T^*_w = T^*_w T_w = 0$. Par exemple, pour $s \in S$,
$$T^*_s = T_s + \sum_{\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q),\ s\chi = \chi} \chi(\delta_s) \epsilon_\chi$$

et pour w dans le groupe de Weyl affine de décomposition réduite $w = s_{i_1}...s_{i_k}$, on a $T^*_w = T^*_{s_{i_k}}...T^*_{s_{i_1}}$.

La pro-p-algèbre de Hecke possède aussi une présentation de type Bernstein, établie par Vignéras, et rappelée dans [**3**, 2.2]. Elle contient en effet une sous-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}$ sur laquelle elle est de type fini et qui contient le centre. Le groupe W agit naturellement sur $\mathcal{A}^{(1)}$ et ses $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères. A un tel caractère $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ on associe comme dans [**3**, 3.5] son *drapeau*. C'est un drapeau de $\{1, ..., n\}$ qui décrit le “support” du caractère. Le caractère induit de façon naturelle un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \lambda$ que l'on note $I(\lambda)$ et que l'on appelle le module standard induit par λ.

2. Modules standards réguliers

Soit $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \otimes ... \otimes \mathfrak{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un caractère. L'espace des $I(1)$-invariants de la série principale $\mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}\mathfrak{X}$ est naturellement un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite. C'est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $(f_{B(F)wI(1),\mathfrak{X}})_{w\in W}$ où pour tout élément w du groupe de Weyl fini W on désigne par $f_{B(F)wI(1),\mathfrak{X}}$ l'élément $I(1)$-invariant de support $B(F)wI(1)$ et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en w.

Soit $\lambda_{\mathfrak{X}} : \mathcal{A}^{(1)} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$ le caractère régulier de drapeau dominant associé à $\mathfrak{X}$ par [**3**, 4.1.2]. D'après 4.1.3 *loc.cit*, on a un morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$I(\lambda_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow [(\mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}, \ \ \varphi \longmapsto f_{B(F)I(1),\mathfrak{X}}, \tag{3}$$

où φ désigne le générateur canonique du module standard induit par $\lambda_{\mathfrak{X}}$. (Pour M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite, on note $[M]_{\mathfrak{g}}$ le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche qu'il définit naturellement, voir par exemple 1.1.3 *loc.cit*).

2.1. Entrelacements entre modules standards réguliers et condition d'isomorphisme. — On se donne $w \in W$ et l'on note φ_w le générateur canonique du module standard induit par $w.\lambda_{\mathfrak{X}}$. On pose $\mu = w.\lambda_{\mathfrak{X}}$. Soit $i \in \{1, ..., n-1\}$.

Proposition 2.1. —

1. *Si $\ell(s_i w) = \ell(w) + 1$, alors le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules suivant est bien défini*

$$I(s_i.\mu) \longrightarrow I(\mu), \ \ \varphi_{s_i w} \longmapsto T^*_{s_i}\varphi_w. \tag{4}$$

2. *Si $\ell(w^{-1}s_i w) = 1$ et le caractère $\mathfrak{X}$ n'est pas fixé par l'action de $w^{-1}s_i w$, ou bien si $\ell(w^{-1}s_i w) > 1$, c'est un isomorphisme.*

Corollaire 2.2. — *Si $\ell(w^{-1}s_i w) = 1$ et le caractère $\mathfrak{X}$ n'est pas fixé par $w^{-1}s_i w$, ou bien si $\ell(w^{-1}s_i w) > 1$, les modules standards induits pas $w.\lambda_{\mathfrak{X}}$ et $s_i w.\lambda_{\mathfrak{X}}$ sont isomorphes.*

Preuve de la proposition. — Soit $i \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $\ell(s_i w) = \ell(w) + 1$. D'après la relation (2), la racine $w^{-1}(\alpha_i)$ est positive donc il existe $k \in \{2, ..., n\}$ tel que $w(k) = i+1$ et que i n'appartient pas à l'ensemble

$$I = \{w(k), ..., w(n)\}$$

qui figure dans le drapeau de $\mu = w.\lambda_{\mathfrak{X}}$. Par conséquent, l'hypothèse 1 de [**3**] est vérifiée et le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules (4) est bien défini d'après le Lemme 5 *loc.cit.*

– Supposons que $\ell(w^{-1}s_iw) > 1$. Cela signifie que $w^{-1}(i) \neq k-1$ et $k > 2$. Ainsi, $I \cup \{i\}$ est distinct de l'ensemble $\{w(k-1), w(k), ..., w(n)\}$, unique ensemble de cardinal $n-k+2$ figurant dans le drapeau de μ. Par conséquent, la constante $\beta_{i,I}(\mu) = \mu(E_{I-\{i+1\}})\mu(E_{I\cup\{i\}})\mu(E_I)^{-1}$ est nulle.
– Supposons que $\ell(w^{-1}s_iw)$ est de longueur 1. Alors $w^{-1}(i) = k-1$ et $\ell(w^{-1}s_iw) = s_{k-1}$. La constante $\beta_{i,I}(\mu)$ est alors égale à

$$\beta_{i,I}(\mu) = \lambda_{\mathfrak{X}}(E_{\{k+1,...n\}})\mathfrak{X}_{k-1}(\pi)\mathfrak{X}_k^{-1}(\pi) = \mu(E_I)\mathfrak{X}_{k-1}(\pi)\mathfrak{X}_k^{-1}(\pi).$$

Si $\mathfrak{X}$ n'est pas fixé par l'action de s_{k-1}, alors ou bien sa restriction au tore fini n'est pas fixée par s_{k-1}, ou bien $\mathfrak{X}_{k-1}(\pi) \neq \mathfrak{X}_k(\pi)$ de sorte que $\beta_{i,I}(\mu) \neq \mu(E_I)$.

Dans les deux cas, l'une des hypothèses 2 et 3 *loc.cit* est vérifiée et par la proposition 8, le morphisme (4) est un isomorphisme.

□

2.2. Modules standards et induction parabolique. — Soit Q un sous-groupe parabolique de G contenant B. On note Δ_Q l'ensemble des racines simples associées, W_Q le sous-groupe de W engendré par les réflexions correspondantes et w_0^Q l'élément le plus long de W_Q. On rappelle que c'est un élément d'ordre 2. Il vérifie $w_0^Q(\Delta_Q) \subset \Phi^-$ et $w_0^Q(\Delta - \Delta_Q) \subset \Phi^+$. Comme dans [**4**, Définition 6] on définit D_Q comme l'ensemble des $w \in W$ tels que $w^{-1}(\Delta_Q) \subset \Phi^+$. C'est un système de représentants des classes à droite $W_Q\backslash W$.

D'après la proposition 2.1, on a un morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules défini par

$$I(w_0^Q.\lambda_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow I(\lambda_{\mathfrak{X}}), \quad \varphi_{w_0^Q} \longmapsto T^*_{w_0^Q}\varphi$$

que l'on compose avec le morphisme (3) pour obtenir un morphisme

$$I(w_0^Q.\lambda_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow [(\mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}, \quad \varphi_{w_0^Q} \longmapsto f_{B(F)I(1),\mathfrak{X}}.T^*_{w_0^Q}. \tag{5}$$

On suppose que le sous-groupe parabolique Q est *adapté au caractère* $\mathfrak{X}$ c'est-à-dire que le caractère $\mathfrak{X}$ est fixé par l'action des éléments de W_Q. On note alors ρ le caractère de Q défini par $\mathfrak{X}$. L'induite parabolique $\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\rho$ s'identifie à une sous-représentation de la série principale $\mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}\mathfrak{X}$. Son espace des $I(1)$-invariants a pour base $(f_{Q(F)wI(1),\rho})_{w\in D_Q}$.

Lemme 2.3. — *Dans* $(\mathrm{Ind}_{B(F)}^{G(F)}\mathfrak{X})^{I(1)}$ *on a* $f_{Q(F)I(1),\rho} = \sum_{w\in W_Q} \rho(w) f_{B(F)wI(1),\mathfrak{X}}$.

Démonstration. — On a $Q = BW_QB$ donc $Q(F)I(1) = B(F)W_QB(F)I(1)$ et l'on vérifie alors aisément que $Q(F)I(1) = B(F)W_QI(1)$. On conclut en notant que pour $w \in W_Q$, on a $f_{Q(F)I(1),\rho}(w) = \rho(w)$.

□

Lemme 2.4. — *Pour tout* $w \in D_Q$*, l'action à droite de* $T_w \in \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ *sur l'élément* $I(1)$*-invariant* $f_{Q(F)I(1),\rho} \in (\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\rho)^{I(1)}$ *est donnée par :*

$$f_{Q(F)I(1),\rho}.T_w = f_{Q(F)wI(1),\rho}.$$

En particulier, l'élément $f_{Q(F)I(1),\rho}$ *engendre le* $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$*-module à droite* $(\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\rho)^{I(1)}$.

Démonstration. — Le support de l'élément $I(1)$-invariant $f_{Q(F)I(1),\rho}.T_w$ est contenu dans $Q(F)I(1)wI(1) = Q(F)wI(1)$. Pour démontrer l'égalité demandée, il suffit donc de prouver qu'il vaut $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en w. On décompose $I(1)wI(1)$ en classes à droite $I(1)wI(1) = \coprod_x I(1)wx$. Alors

$$[f_{Q(F)I(1),\rho}.T_w](\,?\,) = \sum_x f_{Q(F)I(1),\rho}(\,?\,x^{-1}w^{-1}).$$

Par unicité de l'écriture dans la décomposition de Bruhat $G = QD_QU$, on montre que si $wx^{-1}w^{-1} \in Q(F)I(1)$ alors c'est que $I(1)wx = I(1)w$ donc $[f_{Q(F)I(1),\rho}.T_w](w) = 1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$.

□

Lemme 2.5. — *L'image de $\rho(w_0^Q)\varphi_{w_0^Q}$ par le morphisme (5) est égale à l'élément $f_{Q(F)I(1),\rho}$.*

Démonstration. — On désigne par $\mathcal{H}_Q$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ engendrée par $(\epsilon_\chi)_{\chi\in\hat{T}(\mathbb{F}_q)}$ et les $(T_w)_{w\in W_Q}$. Par hypothèse, la restriction χ_0 de $\mathfrak{X}$ au tore fini est fixée par l'action de tout élément de W_Q, donc ϵ_{χ_0} commute avec les éléments de $\mathcal{H}_Q$. Pour toute réflexion $s_i \in W_Q$, on a $T^*_{w_0^Q}T_{s_i} = 0$. Ainsi, l'idéal à droite de $\mathcal{H}_Q$ engendré par $\epsilon_{\chi_0}T^*_{w_0^Q}$ est égal à la droite dirigée par cet élément. Nous allons montrer l'égalité suivante dans l'algèbre $\mathcal{H}_Q$:

$$\rho(w_0^Q)\,\epsilon_{\chi_0}\,T^*_{w_0^Q} = \sum_{w\in W_Q} \epsilon_{\chi_0}\,\rho(w)\,T_w. \tag{6}$$

On en déduit aisément le lemme en remarquant que l'action à droite de ϵ_{χ_0} fixe l'élément $I(1)$-invariant $f_{B(F)I(1),\mathfrak{X}}$ (**[3]** Preuve de la proposition 7) et en appliquant les lemmes 2.3 et 2.4.

Notons Y le terme de droite de (6). Pour montrer qu'il est égal à celui de gauche on vérifie : a/ pour toute réflexion $s_i \in W_Q$, on a $T_{s_i}Y = 0$, puis b/ Y est dans l'idéal à droite de $\mathcal{H}_Q$ engendré par $\epsilon_{\chi_0}T^*_{w_0^Q}$. Pour conclure, il suffit alors de noter que le cœfficient de Y selon $\epsilon_{\chi_0}T_{w_0^Q}$ est égal à $\rho(w_0^Q)$ c'est-à-dire à celui de $\rho(w_0^Q)\epsilon_{\chi_0}T^*_{w_0^Q}$.

a/On note γ l'orbite de χ_0 sous l'action de W et ϵ_γ l'idempotent central lui correspondant. Pour $s_i \in W$ on a

$$T^*_{s_i}\epsilon_\gamma = T_{s_i}\epsilon_\gamma + \sum_{\chi\in\gamma, s_i\chi=\chi} \chi(\delta_{s_i})\epsilon_\chi.$$

Ainsi $T^2_{s_i}\epsilon_\gamma = -\sum_{\chi\in\gamma,s_i\chi=\chi}\chi(\delta_{s_i})\epsilon_\chi T_{s_i}$. Soit $s_i \in W_Q$. Remarquons que $\rho(s_i) = \chi_0(\delta_{s_i})$.

$$\begin{aligned}
T_{s_i}Y &= \sum_{\substack{w\in W_Q\\ \ell(s_iw)=\ell(w)+1}} \rho(w)\epsilon_{\chi_0}T_{s_iw} - \sum_{\substack{w\in W_Q\\ \ell(s_iw)=\ell(w)-1}} \rho(w)\epsilon_{\chi_0}\left[\sum_{\chi\in\gamma,s_i\chi=\chi}\chi(\delta_{s_i})\epsilon_\chi\right]T_w\\
&= \sum_{\substack{w\in W_Q\\ \ell(s_iw)=\ell(w)-1}} \chi_0(\delta_{s_i})\rho(w)\epsilon_{\chi_0}T_w - \sum_{\substack{w\in W_Q\\ \ell(s_iw)=\ell(w)-1}} \rho(w)\epsilon_{\chi_0}\chi_0(\delta_{s_i})T_w\\
&= 0.
\end{aligned}$$

b/ Pour $s_i \in W_Q$, on a $\epsilon_{\chi_0}T^*_{s_i} = \epsilon_{\chi_0}T_{s_i} + \chi_0(\delta_{s_i})\epsilon_{\chi_0}$, donc $Y = \epsilon_{\chi_0}Y = \chi_0(\delta_{s_i})(\epsilon_{\chi_0}T^*_{s_i}Y - \epsilon_{\chi_0}T_{s_i}Y) = \chi_0(\delta_{s_i})\epsilon_{\chi_0}T^*_{s_i}Y = \rho(s_i)\epsilon_{\chi_0}T^*_{s_i}Y$. Ainsi, par récurrence à l'aide d'une écriture réduite de w_0^Q, on obtient $Y = \rho(w_0^Q)\epsilon_{\chi_0}T^*_{w_0^Q}Y$ qui appartient à l'idéal à droite de $\mathcal{H}_Q$ engendré par $\epsilon_{\chi_0}T^*_{w_0^Q}$.

□

On déduit des lemmes 2.4 et 2.5 :

Proposition 2.6. — *Le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules (5) a pour image l'espace $[(\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\rho)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$.*

On retrouve le fait que le morphisme (3) est surjectif. On a même :

Proposition 2.7. — *Le morphisme (3) est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de s'assurer que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $n!$. Le sous $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$ engendré par les $\{T_w\varphi\}_{w\in W}$ est stable sous l'action des éléments ϵ_χ, $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, et T_{s_1}. Pour achever de montrer que c'est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module, il suffit de vérifier qu'il est stable sous l'action de T_ω car $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est engendrée par $\{\epsilon_\chi,\ \chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q), T_{s_1}, T_\omega^{\pm 1}\}$ et T_ω^n agit par multiplication, par un scalaire non nul. Or on a la relation suivante : pour tous $w_0 \in W$, $y, z \in X_{dom}$ tels que la diagonale $x_1 = diag(\pi, 1, ..., 1)$ s'écrit $w_0 y z^{-1} w_0^{-1}$,

$$T_{w_0} T_z = T_{x_1^{-1} w_0} T_y. \tag{8}$$

Ainsi, et en écrivant $\omega = s_{n-1}...s_2 s_1 x_1$, on a

$$T_\omega T_{w_0} T_z = T_{\omega x_1^{-1} w_0} T_y = T_{s_{n-1}...s_1 w_0} T_y.$$

Puisque z et y sont dominants, l'action de cet élément de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ sur le générateur canonique φ du module standard est :

$$\mathfrak{X}(z) T_\omega T_{w_0} \varphi = \mathfrak{X}(y) T_{s_{n-1}...s_1 w_0} \varphi$$

ainsi, $T_\omega T_{w_0}\varphi$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $\{T_w\varphi\}_{w\in W}$ qui est donc un sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module de $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$. Puisqu'il est engendré par φ, il est égal à $I(\lambda_{\mathfrak{X}})$ tout entier qui est donc un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $n!$.

Preuve de la formule (8) : pour les calculs de longueurs dans le groupe de Weyl affine étendu, on se réfère à [**2**, 1.4] ou bien à (Bourbaki GAL VI 1.) Le terme de gauche de l'égalité (8) est égal à $T_{w_0 z}$ car z est dominant donc $\ell(w_0 z) = \ell(w_0) + \ell(z)$. Si l'on montre que l'on a $\ell(x_1^{-1} w_0) + \ell(y) = \ell(x_1^{-1} w_0 y)$ alors l'égalité sera démontrée car son terme de droite sera $T_{x_1^{-1} w_0 y} = T_{w_0 z}$. Pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$ et tous $x \in X$, $w \in W$ on pose

$$n(\alpha, wx) = \begin{cases} (\alpha^\vee, x) & \text{si} \quad w(\alpha) \in \Phi^+, \\ (\alpha^\vee, x) + 1 & \text{si} \quad w(\alpha) \in \Phi^-. \end{cases}$$

On a l'égalité $\ell(x_1^{-1} w_0) + \ell(y) = \ell(x_1^{-1} w_0 y)$ dès que $n(\alpha, w_0 z y^{-1})$ et $n(\alpha, y)$ ont même signe au sens large pour tout $\alpha \in \Phi^+$, c'est-à-dire dès que $n(\alpha, w_0 z y^{-1}) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. Soit α une racine positive. Puisque zy^{-1} est conjugué à la diagonale x_1^{-1}, on a toujours $1 + (\alpha^\vee, zy^{-1}) \geq 0$. D'autre part, l'entier $(\alpha^\vee, zy^{-1})$ est égal à $(w_0\alpha)^\vee(x_1^{-1})$ et ne sera strictement négatif qu'à condition que $w_0(\alpha) \in \Phi^-$.

□

3. Espace des $I(1)$-invariants des séries principales

3.1. On désigne par $Q_{\mathfrak{X}}$ le parabolique standard maximal adapté à $\mathfrak{X}$, et par $Q \subset Q_{\mathfrak{X}}$ un parabolique adapté à $\mathfrak{X}$. Soient $\Delta_{\mathfrak{X}}$ et Δ_Q les ensembles de racines simples respectivement associés. On note ρ le caractère de $Q_{\mathfrak{X}}$ défini par $\mathfrak{X}$. Nous allons montrer que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite suivant est irréductible :

$$\frac{(\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)} \rho)^{I(1)}}{\sum_{Q_{\mathfrak{X}} \supset R \supsetneq Q} (\mathrm{Ind}_{R(F)}^{G(F)} \rho)^{I(1)}} \tag{9}$$

où R décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques contenant strictement Q et inclus dans $Q_{\mathfrak{X}}$.

On définit le sous-ensemble $D_{Q,\mathfrak{X}}$ de D_Q des éléments w tels que $w^{-1}(\Delta_Q) \subset \Phi^+$ et $w^{-1}(\Delta_{\mathfrak{X}} - \Delta_Q) \subset \Phi^-$. Le sous-ensemble

$$D^-_{Q,\mathfrak{X}} = \{w \in W,\ w^{-1}(\Delta_Q) \subset \Phi^- \text{ et } w^{-1}(\Delta_{\mathfrak{X}} - \Delta_Q) \subset \Phi^+\}$$

n'est autre que $(D_{Q,\mathfrak{X}})w_0$ où w_0 désigne l'élément le plus long de W. L'élément le plus long w_0^Q de W_Q appartient à $D^-_{Q,\mathfrak{X}}$. Il vérifie $\ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w) = \ell(w)$ pour tout $w \in D^-_{Q,\mathfrak{X}}$.

Remarquons que l'on a

$$D_Q - D_{Q,\mathfrak{X}} = \bigcup_{Q_{\mathfrak{X}} \supset R \supsetneq Q} D_R.$$

Par le principe d'inclusion-exclusion (comparer $D_{Q,\mathfrak{X}}$ avec le $D_{Q,fin}$ de [**4**]) on obtient :

Proposition 3.1. — *Le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel (9) est de dimension $|D_{Q,\mathfrak{X}}|$.*

Lemme 3.2. — *Soit $w \in D^-_{Q,\mathfrak{X}}$ et $i \in \{1, ..., n-1\}$. On suppose que*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ell(ws_i) & = & \ell(w) - 1 \\ \ell(ws_i) & = & \ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w s_i). \end{array} \right. \tag{10}$$

Alors $ws_i \in D^-_{Q,\mathfrak{X}}$.

Démonstration. — L'égalité $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$ implique $w(\alpha_i) \in \Phi^-$ donc $w^{-1}(\Delta_{\mathfrak{X}} - \Delta_Q) \in \Phi^+ \cap s_i(\Phi^+)$ et $(ws_i)^{-1}(\Delta_{\mathfrak{X}} - \Delta_Q) \subset \Phi^+$. De même, puisque $\ell(ws_i) = \ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w s_i)$, on a $ws_i(\alpha_i) \notin \Delta_Q$. Ainsi, $w^{-1}(\Delta_Q) \subset \Phi^- \cap s_i(\Phi^-)$ donc $(ws_i)^{-1}(\Delta_Q) \subset \Phi^-$. □

Proposition 3.3. — *Soit $w \in D^-_{Q,\mathfrak{X}}$. Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par $w_0^Q.\lambda_{\mathfrak{X}}$ et $w^{-1}.\lambda_{\mathfrak{X}}$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Nous montrons la proposition par récurrence sur la longueur de w c'est-à-dire sur celle de $w_0^Q w$. Si cette dernière est nulle, c'est clair. Soit $w \in D^-_{Q,\mathfrak{X}}$ tel que $\ell(w_0^Q w) \geq 1$. Il existe $i \in \{1, ..., n-1\}$, tel que $\ell(w_0^Q w s_i) = \ell(w_0^Q w) - 1$. Montrons que les hypothèses du lemme 3.2 sont vérifiées : $\ell(ws_i) \leq \ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w s_i) = \ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w) - 1 = \ell(w) - 1$ donc $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$. D'autre part, $\ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w s_i) = \ell(w_0^Q) + \ell(w_0^Q w) - 1 = \ell(w) - 1 = \ell(ws_i)$. Par conséquent, ws_i appartient à $D^-_{Q,\mathfrak{X}}$. Par hypothèse de récurrence, les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par $w_0^Q.\lambda_{\mathfrak{X}}$ et $s_i w^{-1}.\lambda_{\mathfrak{X}}$ sont isomorphes. Reste à montrer qu'ils sont isomorphes au module standard induit par $w^{-1}.\lambda_{\mathfrak{X}}$. Il suffit pour cela d'appliquer le corollaire 2.2 : en effet, si $ws_i w^{-1}$ est de longueur 1, il est de la forme s_k avec $k \in \{1, ..., n-1\}$ et l'on a $(ws_i)^{-1}(\alpha_k) = -w^{-1}(\alpha_k)$. Puisque w et ws_i sont tous deux dans $D^-_{Q,\mathfrak{X}}$, c'est que $\alpha_k \notin \Delta_{\mathfrak{X}}$ donc $ws_i w^{-1}$ ne fixe pas le caractère $\mathfrak{X}$. □

Corollaire 3.4. — *Un quotient non nul du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $w_0^Q.\lambda_{\mathfrak{X}}$ est de dimension supérieure ou égale à $|D_{Q,\mathfrak{X}}|$. Si on a l'égalité, ce quotient est irréductible.*

De la proposition 2.6 on déduit que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche correspondant au module (9) est un quotient du module standard $I(w_0^Q.\lambda_{\mathfrak{X}})$. Puisqu'il est de dimension $|D_{Q,\mathfrak{X}}|$ on a obtenu :

Corollaire 3.5. — *Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite (9) est irréductible.*

Avec [**4**, Proposition 11] on en déduit :

Corollaire 3.6. — *Si Q est un parabolique maximal, la représentation de Steinberg généralisée*

$$\frac{\mathrm{Ind}_{Q(F)}^{G(F)}\mathbf{1}}{\mathbf{1}_{G(F)}}. \tag{11}$$

est irréductible.

Références

[1] Iwahori, N, Matsumoto, H. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 25, 5-48 (1965).

[2] Lusztig, G. Affine Hecke algebras and their graded version. Journal of A.M.S. Vol. 2, No.3 (1989).

[3] Ollivier, R. Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p. Journal of Algebra 304 (2006) 39-72.

[4] Vignéras, M.-F. Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques. 19 avril 2006 révisé 16 octobre 2006.

Décembre 2006

Rachel Ollivier, • *E-mail :* rachel.ollivier@ens.fr